แบบทดสอบก่อนเรียน

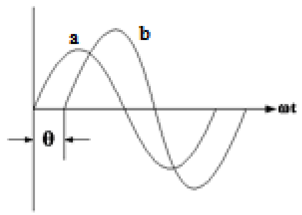
หน่วยที่ 2 เฟส เฟสเซอร์ และเลขเชิงซ้อน (Complex Number)

....

คำชี้แจง

1. จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) เลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว
2. แบบทดสอบมีจำนวน 10 ข้อ ใช้เวลาทำแบบทดสอบ 10 นาที

1. จากรูปเฟสของ e และ i อยู่ในลักษณะ



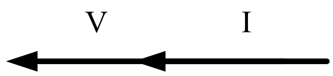
ก. a แอนตีเฟสกับ b

ข. b นำหน้า a

ค. a นำหน้า b **

ง. a ล้าหลัง b

2. จากรูปเฟสเซอร์ไดอะแกรมมีลักษณะ



ก. I อินเฟสกับ V **

ข. I แอนตีเฟสกับ V

ค. I มีมุมต่างเฟสกับ V เป็นมุม 0°

ง. I นำหน้า V เป็นมุม 0°

3. จำนวนเชิงซ้อนประกอบด้วยอะไรบ้าง

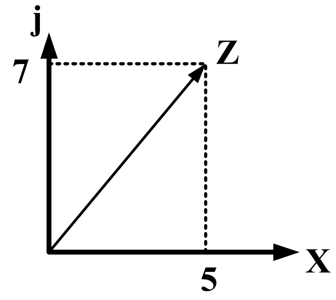
ก. จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number)และค่า มุม

ข. จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number)และค่า j

ค. จำนวนจริง (Real Number) และจินตภาพ (Imaginary Number) **

ง. จำนวนจริง (Real Number) และมุม

4. จากรรูป Z มีค่าเท่ากับ



ก. 7 + 5j

ข. 5 - j7

ค. 5 + j7 **

ง. j5 + 7

5. (100+j15)+(50-j50) =

ก. 150 - j35 **

ข. 150 + j65

ค. -35 + j150

ง. 35 - j150

6. (-20-j25)-(10-j15) =

ก. -30 - j10 **

ข. 30 + j10

ค. 30 + j40

ง. -30 - j40

7. $30\angle{-30^\circ} \times 3\angle{-15^\circ} =$

ก. $30\angle{-50^\circ}$ **

ข. $30\angle{-10^\circ}$

ค. $30\angle{50^\circ}$

ง. $30\angle{10^\circ}$

8. $80 \angle 55^\circ \div 20 \angle 35^\circ =$

ก. $4 \angle -20^\circ$

ข. $4 \angle 20^\circ$ **

ค. $4 \angle -90^\circ$

ง. $40 \angle 90^\circ$

9. เปลี่ยน $25 \angle 0^\circ$ ให้อยู่ในรูปแกนมุมฉาก

ก. 0-j25 **

ข. 25+j0

ค. 25- j0

ง. 0+j25

10. เปลี่ยน 12+j0 ให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้ว

ก. $0 \angle -12^\circ$ **

ข. $0 \angle 12^\circ$

ค. $12 \angle 45^\circ$

ง. $12 \angle 0^\circ$

กระดาษคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน

คำสั่ง จงทำเครื่องหมายกากบาท (X) เลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว ลงในช่องของกระดาษคำตอบ

ชื่อ – สกุล .... เลขที่ .... ชั้น ....

ข้อ	ก	ข	ค	ง
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

สรุปผล

เต็ม	10
ได้	

เกณฑ์การประเมิน

ทำแบบทดสอบได้ 9 – 10 คะแนน ระดับคุณภาพ ดีมาก
ทำแบบทดสอบได้ 7 – 8 คะแนน ระดับคุณภาพ ดี
ทำแบบทดสอบได้ 5 – 6 คะแนน ระดับคุณภาพ พอใช้
ทำแบบทดสอบได้ 0 – 4 คะแนน ระดับคุณภาพ ปรับปรุง

หน่วยที่ 2 เฟส เฟสเซอร์ และเลขเชิงซ้อน (Complex number)

สาระสำคัญ

เฟส เฟสเซอร์ และเลขเชิงซ้อน(Complex Number) เป็นคณิตศาสตร์พื้นฐานในการคำนวณหาค่าพรามิเตอร์ต่างๆ เช่น กระแส แรงดัน หรือ อิมพีแดนซ์ ของวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ ที่มีตัวต้านทาน ขดลวดเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุเป็นส่วนประกอบของวงจร

สาระการเรียนรู้

2.1 ลักษณะของเฟส

2.2 เฟสเซอร์ไดอะแกรม (Phasor Diagram)

2.3 องค์ประกอบของจำนวนเชิงซ้อน

2.4 รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน

2.5 วิธีบวกและลบของจำนวนเชิงซ้อนรูปแกนมุมฉาก (Rectangular Form)

2.6 วิธีคูณของจำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้ว (Polar Form)

2.7 วิธีหารของจำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้ว (Polar Form)

2.8 วิธีเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนเชิงขั้ว (Polar Form)เป็นแกนมุมฉาก(Rectangular Form)

2.9 วิธีเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนแกนมุมฉาก(Rectangular Form)เป็นเชิงขั้ว(Polar Form)

จุดประสงค์การเรียนรู้

2.1 บอกลักษณะความต่างของมุมในการเทียบเฟสได้ถูกต้อง

2.2 เขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรม (Phasor Diagram)ได้ถูกต้อง

2.3 บอกองค์ประกอบของจำนวนเชิงซ้อนได้ถูกต้อง

2.4 เขียนรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อนได้ถูกต้อง

2.5 แสดงวิธีการบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนรูปแกนมุมฉาก (Rectangular Form)ได้ถูกต้อง

2.6 แสดงวิธีการคูณจำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้ว(Polar Form)ได้ถูกต้อง

2.7 แสดงวิธีการหารจำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้ว(Polar Form)ได้ถูกต้อง

2.8 แสดงวิธีการเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนเชิงขั้ว(Polar Form)เป็นแกนมุมฉาก(Rectangular Form)ได้ถูกต้อง

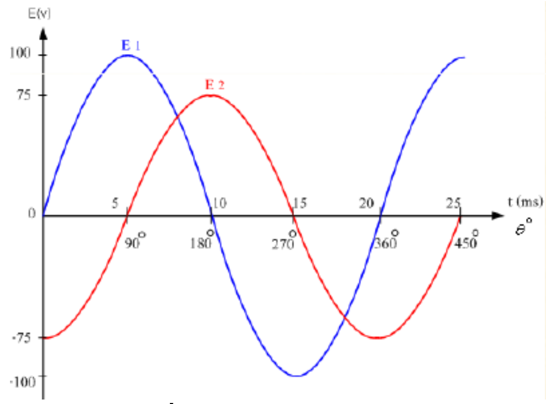
2.9 แสดงวิธีการเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนแกนมุมฉาก(Rectangular Form)เป็นเชิงขั้ว(Polar Form)ได้ถูกต้อง

เนื้อหาสาระ

เฟสเซอร์ และเลขเชิงซ้อน(Complex Number) เป็นคณิตศาสตร์พื้นฐานในการคำนวณหาค่าพารามิเตอร์ต่างๆ เช่น กระแส แรงดัน หรือ อิมพีแดนซ์ ของวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ ที่มีตัวต้านทาน ขดลวดเหนี่ยวนำ และตัวเก็บประจุเป็นส่วนประกอบของวงจร

2.1 ลักษณะของเฟส

คือ ความแตกต่างกันของเวลาหรือมุมที่เกิดสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับขึ้น(มามากกว่าหนึ่งสัญญาณเรียกมุมที่แตกต่างกันว่ามุมเฟส (Phase Angle)



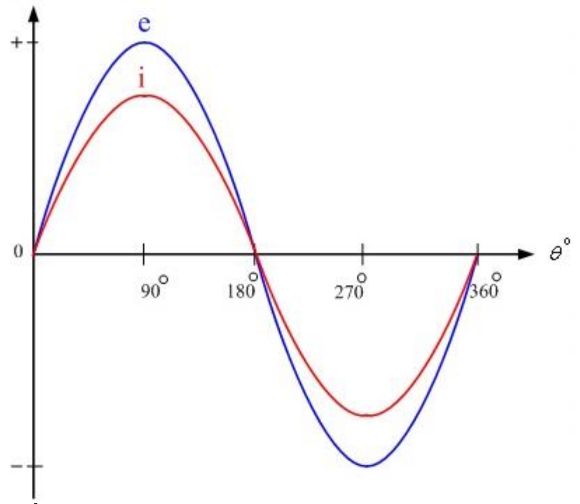
รูปที่ 2.1 แสดงภาพของเฟส

จากรูป เป็นคลื่นไซน์ 2 สัญญาณมีเฟสต่างกัน 90° แรงดันทั้ง(สองมีความถี่50 Hz แรงดัน E1 มีระดับแรงดัน 100V เกิดขึ้น(ที่เฟสปกติ 0° หรือเวลา 0 ms แรงดัน E2 มีระดับแรงดัน 75V เกิดขึ้น(ช้ากว่าแรงดัน E1เป็น มุม 90° หรือเวลาต่างกัน 5 ms ระดับแรงดันของ E1และ E2 มีค่าแรงดันสูงสุดในเวลาที่แตกต่างกันอยู่ 5 ms เสมอ

การพิจารณาเฟสของสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับ ต้องพิจารณาจากปริมาณไฟฟ้าที่มีความถี่เดียวกัน จึงสามารถเปรียบเทียบเฟสกันได้ ถ้าหากมีความถี่ไม่เท่ากัน มีชื่อเรียกเฟสในลักษณะต่าง ๆ แตกต่างกันไป

สำหรับการเปลี่ยนหรือการเคลื่อนที่ของเฟส เรียกว่า Phase Shiftลักษณะของเฟสแบ่งออกได้เป็น 3 ลักษณะคือ

2.1 เฟสร่วมกัน (In Phase) หมายถึง คือ รูปคลื่นไฟฟ้ากระแสสลับสองสัญญาณเกิดขึ้นพร้อมกัน ซ้อนทับกันพอดี คลื่นสัญญาณทั้งสองจะมีความแรงเท่ากันหรือต่างกันก็ได้ แต่ต้องมีทิศทางการเกิดคลื่นเหมือนกัน



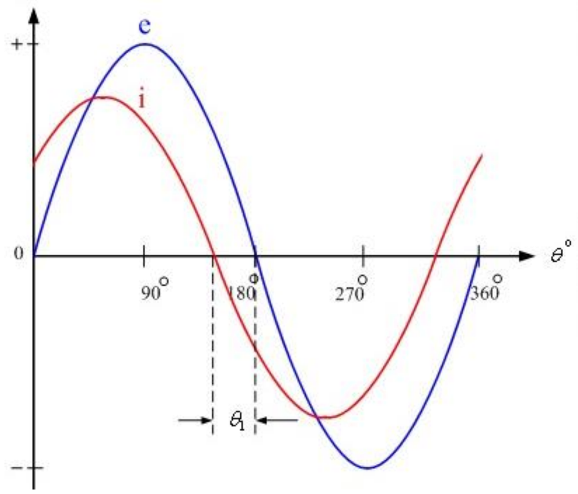
รูปที่ 2.2 เฟสร่วมกัน(In Phase) ของกระแสกับแรงดัน

จากรูปเป็นรูปคลื่นไซน์ของแรงดัน e และกระแส i มีเฟสเหมือนกัน คือ เริ่มเกิดคลื่นไซน์ที่ตำแหน่ง 0° เหมือนกัน สามารถเขียนสมการแรงดันและกระแสออกมาได้ดังนี้

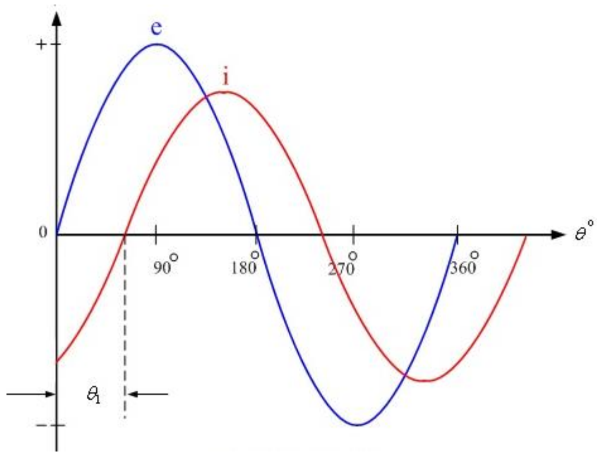
$e = Em\ Sin\omega t$

$i = Im\ Sin\omega t$

2.2 เฟสต่างกัน (Out Of phase) หมายถึง คือ รูปคลื่นไฟฟ้ากระแสสลับสองสัญญาณเกิดขึ้นในเวลาไม่พร้อมกัน คลื่นสัญญาณทั้ง สองจะมีความแรงเท่ากันหรือต่างกันก็ได้ แต่ต้องมีเวลาการเกิดคลื่นไม่พร้อมกัน สัญญาณทั้ง สองมีมุมเฟสต่างกันมากกว่า 0° แต่น้อยกว่า 180° เฟสเลื่อนมี 2 ลักษณะคือ เฟสเลื่อนแบบนำหน้าและเฟสเลื่อนแบบล้าหลัง ลักษณะรูปคลื่นไฟฟ้ากระแสสลับมีเฟสเลื่อน แสดงดังรูปที่ 2.3



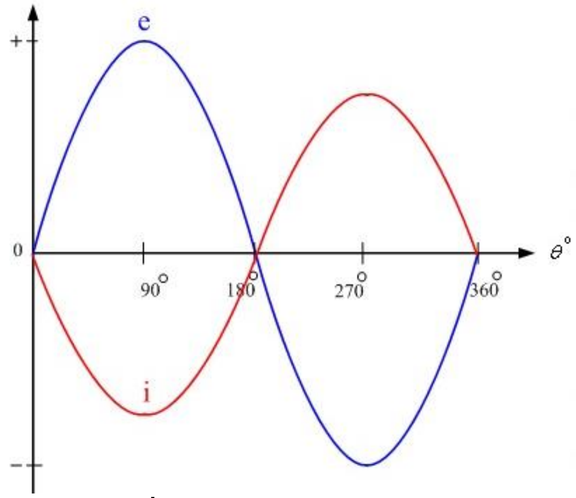
(ก) เฟส i นำหน้าเฟส e



(ข) เฟส i ล้าหลังเฟส e

รูปที่ 2.3 เฟสนำหน้า และเฟสล้าหลัง

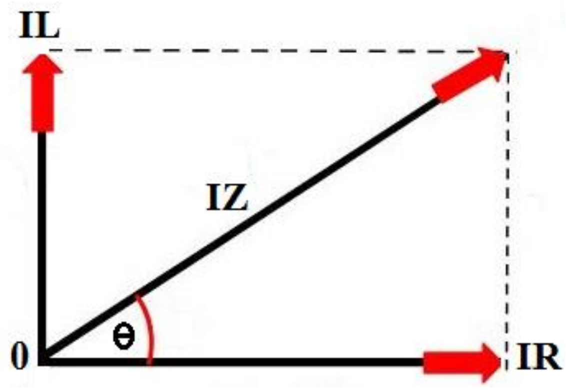
2.3 เฟสด้านกลับ แอนตีเฟส (Anti phase) รูปคลื่นไฟฟ้ากระแสสลับสองสัญญาณเกิดขึ้นพร้อมกันซ้อนทับกันพอดี คลื่นสัญญาณทั้งสองจะมีความแรงเท่ากันหรือต่างกันก็ได้แต่ต้องมีทิศทางการเกิดคลื่นตรงข้ามกัน เช่น สัญญาณ e เริ่มต้นเกิดคลื่นบวก สัญญาณ i ต้องเริ่มต้นเกิดคลื่นลบ สัญญาณทั้ง สองมีมุมเฟสต่างกัน180° หรือ πrad ดังรูปที่ 2.4



รูปที่ 2.4 แอนตีเฟส (Anti phase)

2.2 เฟสเซอร์ไดอะแกรม (Phasor Diagram)

เฟสเซอร์ไดอะแกรม หมายถึง เวกเตอร์ที่เขียนแทนสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับที่มีขนาดคงที่และความเร็วคงที่ เส้นตรงและหัวลูกศรหนึ่งเส้นแทนปริมาณสัญญาณไฟฟ้าหนึ่งสัญญาณ ฟังก์ชั่นอื่นเขียนแทนเฟสเซอร์ไม่ได้ เช่น อิมพิแดนซ์ (Z) ไม่เป็นรูปคลื่นไซน์จึงไม่ใช่เฟสเซอร์ จะเป็นเพียงเวกเตอร์เท่านั้น เวกเตอร์และเฟสเซอร์ จึงมีความหมายคล้ายคลึงกัน แต่การนำไปใช้แตกต่างกัน กล่าวคือ เวกเตอร์ ประกอบด้วยขนาดและทิศทาง นิยมใช้เวกเตอร์แสดงคุณลักษณะทางกายภาพ เช่น แรง (Force) ส่วนเฟสเซอร์คือปริมาณเวกเตอร์ที่หมุนตามมุมต่างๆรอบจุดศูนย์กลางของวงกลม (Origin)



รูปที่ 2.5 เฟสเซอร์ไดอะแกรม

ในการเขียนเฟสเซอร์ไดอะแกรม มีวิธีการเขียนดังนี้

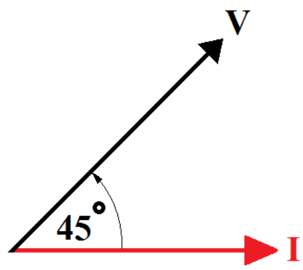
2.2.1 กำหนดแกนหลักโดยปกติแล้วเรานิยมใช้เส้นตรงแนวแกนนอนเป็นแกนหลัก

2.2.2 กำหนดความยาวของเส้นตรง โดยการเขียนเฟสเซอร์ระหว่างแรงดันและกระแสเราจะใช้สเกลแยกกัน เนื่องจากมีหน่วยที่ไม่เหมือนกัน

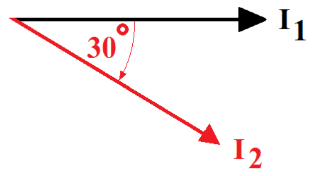
2.2.3 ขนาดของมุมเฟสจะต้องมีค่าเท่ากับหรือใกล้เคียงกับขนาดจริง โดยจะต้องไม่ลืมเขียนหัวลูกศรที่ปลายเส้นในทุกๆเส้นด้วย และต้องเขียนมุมบอกด้วยทุกๆครั้ง โดยจะใช้แกนหลักเป็นแกนอ้างอิง หรือไม่ก็จะใช้เส้นตรงของเฟสเซอร์ที่อยู่ใกล้กันจับมาเป็นตัวอ้างอิงได้ แต่ยกเว้นมุมเฟสมีค่าเท่ากับศูนย์ เราไม่ต้องบอกขนาดในกรณีเมื่อเส้นตรงเฟสเซอร์อยู่ตรงข้ามกับแกนอ้างอิงหรือตั้งฉากกับแกนอ้างอิง 90° หรือ 270°

2.2.4 จากนั้นให้เรากำหนดเครื่องหมายบวกหรือลบระหว่างเส้นตรงเฟสเซอร์ เพื่อให้รู้ว่าเฟสนั้นนำหน้าหรือล้าหลัง โดยเฟสที่มีทิศทางเป็นบวกจะมีเฟสนำหน้า เฟสที่มีทิศทางเป็นลบจะเป็นเฟสล้าหลัง โดยให้เรายึดทิศทางตามเข็มนาฬิกามาอ้างอิง

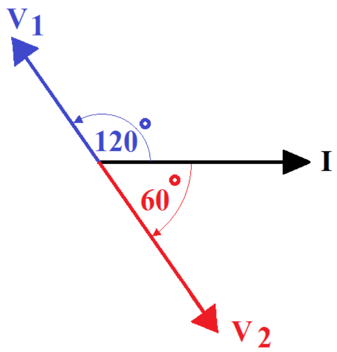
(ก) I และ V เฟสร่วมกัน (In Phase)



(ข) เฟส V นำหน้าเฟส I 45°



(ค) เฟส I_1 นำหน้าเฟส I_2 30°



(ง) เฟส I ล้าหลังเฟส V_1 120°

และนำหน้าเฟส V_2 60°

รูปที่ 2.6 เฟสเซอร์ไดอะแกรมแบบต่าง ๆ

จากรูปที่ 2.6 แสดงเฟสเซอร์ไดอะแกรมแบบต่าง ๆ รูปที่ 2.6 (ก) แสดงเฟสเซอร์ไดอะแกรมของกระแส I และแรงดัน V ในทิศทางเดียวกันหรือเรียกว่า อินเฟสกัน รูปที่ 2.6 (ข) แสดงเฟสเซอร์ไดอะแกรมของกระแส I ล้าหลังแรงดัน V เป็นมุม 45° หรือต่างเฟสกัน 45° รูปที่ 2.6 (ค) แสดงเฟสเซอร์ไดอะแกรมของกระแส I_1 นำหน้า กระแส I_2 เป็นมุม 30° และรูปที่2.6 (ง) แสดงเฟสเซอร์ไดอะแกรมของแรงดัน V1, V2 และกระแส I โดยที่กระแส I ล้าหลังแรงดัน V_1 เป็นมุม 120° และกระแส I นำหน้าและแรงดัน V_2 เป็นมุม 60°

2.3 องค์ประกอบของจำนวนเชิงซ้อน

องค์ประกอบของปริมาณเชิงซ้อนจะประกอบด้วยจำนวนจริง (Real Number) กับจำนวนจินตภาพ (Imaginary Number) ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้

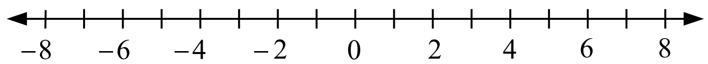
2.3.1 จำนวนจริง (Real Number) คือ จำนวนที่ทราบค่าว่ามีมากน้อยเท่าใด

แบ่งออกเป็น

- จำนวนตรรกยะ (Rational Number) คือจำนวนที่เป็นตัวเลข จำนวนเต็มเศษส่วน หรือทศนิยม
- จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number) คือจำนวนที่ไม่สามารถหาค่าได้ถูกต้อง เช่น

$\sqrt{3} = 1.732........$, $\sqrt{5} = 2.236........$, $\log 3 = 0.47712$

จำนวนจริงทั้งหมดนี้สามารถนำไปเขียนบนเส้นตรงจากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่งที่ต่อเนื่องกัน ได้เส้นตรงนี้ เรียกว่า เส้นแกนจำนวนจริงหรือแกนจริง(Real Number Line)จำนวนจริงนี้นำมาบวก ลบ คูณและหารได้ตามวิธีทางพีชคณิต เส้นแกนจำนวนจริง(Real axis) แสดงดังรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 เส้นแกนจำนวนจริง

2.3.2 จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number) คือ จำนวนที่ไม่ทราบค่าว่ามีมากน้อยเพียงใด ได้แก่ค่ารากที่สองของจำนวนจริงที่มีค่าเป็นลบ เช่น $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-5}$, หรือ $\sqrt{-25}$

ถ้ากำหนดให้ $j = \sqrt{-1}$

ดังนั้น $\sqrt{-2} = \sqrt{(-1)(2)}$

$= \sqrt{-1} \times \sqrt{2}$

จะได้ $\sqrt{-2} = j\sqrt{2}$

ดังนั้น $\sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(4)}$

$= \sqrt{-1} \times \sqrt{4}$

จะได้ $\sqrt{-4} = j\,2$

ดังนั้น $\sqrt{-25} = \sqrt{(-1)(25)}$

$= \sqrt{-1} \times \sqrt{25}$

จะได้ $\sqrt{-25} = j\,5$

ดังนั้น $j^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$

$= \sqrt{(-1)(-1)}$

จะได้ $j^2 = -1$

ดังนั้น $j^3 = j^2 \times j$

$= (-1) \times j$

จะได้ $j^3 = -j$

ดังนั้น $j^4 = j^2 \times j^2$

$= (-1) \times (-1)$

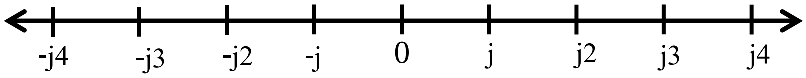
จะได้ $j^4 = 1$

ดังนั้น $j^5 = j^4 \times j$

$= 1 \times j$

จะได้ $j^5 = j$

จำนวนจินตภาพ สามารถเขียนลงตามจุดบนเส้นตรงซึ่งวางตามแนวแกนเส้นตรงเรียกว่าแกนจินตภาพ (j - axis) ดังรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 แนวเส้นจำนวนจินตภาพ

ปริมาณเชิงซ้อน คือ ผลรวมของแกนในแนวระนาบกับแนวตั้งฉากที่สามารถบอกขนาดและทิศทางของเฟสเซอร์ไดอะแกรมได้อย่างชัดเจน ดังนั้นในการคำนวณในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับทั่วไป จึงมักจะวิเคราะห์ในรูปแบบของปริมาณเชิงซ้อน ซึ่งมีชื่อเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า จำนวนเชิงซ้อน นอกจากนี้อาจเรียกว่า คอมเพล็กนัมเบอร์ (Complex Number) ใช้อักษร Z

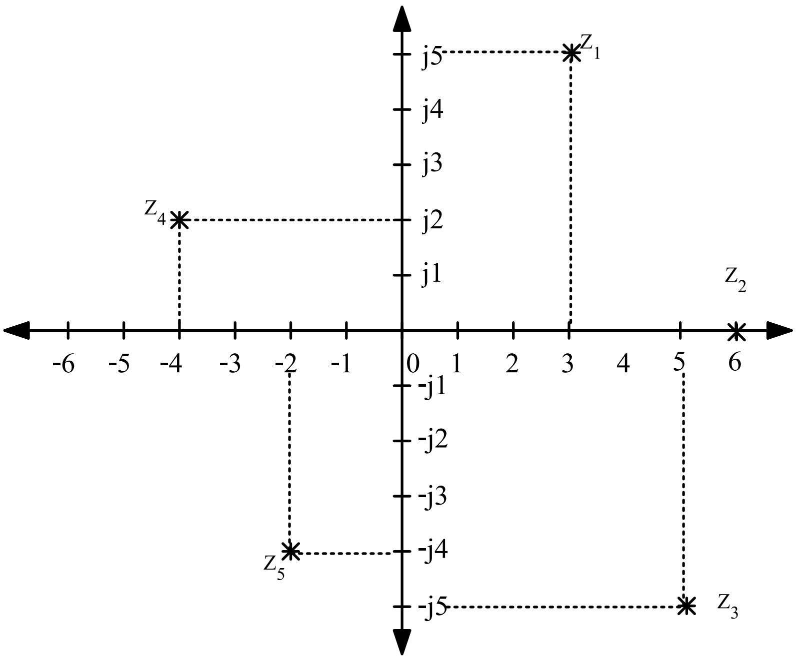
ถ้ากำหนดให้ Z เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะได้ว่า

$$Z = x + jy \tag{2-1}$$

เมื่อ x = ส่วนที่เป็นจำนวนจริง (Real Part)

jy = ส่วนที่เป็นจำนวนจินตภาพ (Imaginary Part)

ถ้ากำหนดให้แกนจริงอยู่ในแนวนอน ตั้งฉากกับแกนจินตภาพ ซึ่งตั้งอยู่ ในแนวแกนตั้ง สามารถที่จะกำหนดจำนวนเชิงซ้อนลงบนพื้นราบ (Plane) ระหว่างแกนทั้งสองนี้ได้ ดังรูปที่ 2.9



รูปที่ 2.9 กำหนดจำนวนเชิงซ้อนบนพื้นราบ

จากรูปที่ 2.9 สามารถกำหนดค่าของจำนวนเชิงซ้อนบนพื้นราบได้ดังนี้

จาก $Z = x + jy$

ดังนั้น $Z_1 = 3 + j5$

$Z_2 = 6 + j\,0$

$Z_3 = 5 - j\,5$

$Z_4 = -4 + j\,2$

$Z_5 = -2 - j\,4$

2.4 รูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน

วงจรไฟฟ้ากระแสสลับทำงานด้วยคลื่นไซน์ เมื่อผ่านเข้าวงจรที่ประกอบด้วยตัวต้านทาน (R) ตัวเหนี่ยวนำ (L) และตัวเก็บประจุ (C) ทำให้รูปคลื่นมีมุมเฟสเปลี่ยนแปลงไปการเขียนค่าสมการแสดงผลเป็นรูปจำนวนเชิงซ้อนจะง่ายต่อการเข้าใจเพราะเลขจำนวนเชิงซ้อนแสดงค่าทั้งขนาดและทิศทางของปริมาณเวกเตอร์ ซึ่งรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อนสามารถเขียนได้ดังนี้

2.4.1 จำนวนเชิงซ้อนรูปแกนมุมฉาก (Rectangular Form)

จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบแกนมุมฉาก แสดงปริมาณเวกเตอร์ด้านกว้างและด้านยาวของสี่เหลี่ยมมุมฉาก ด้านหนึ่งเป็นจำนวนจริง อีกด้านหนึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ สามารถเขียนสมการได้ดังนี้

$$Z = x \pm jy \qquad (2\text{-}2)$$

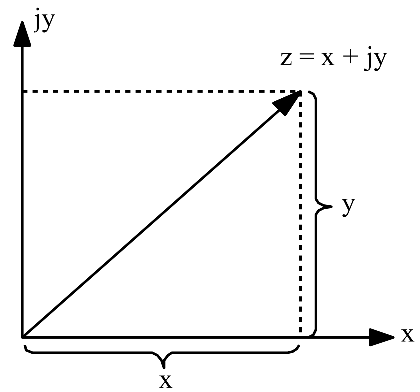
เมื่อ x = ส่วนที่เป็นจำนวนจริงบนแกนนอน

jy = ส่วนที่เป็นจำนวนจินตภาพบนแกนตั้ง มีค่าทั้งบวกและลบ

เช่น $Z_1 = 3 + j\,5$

หรือ $Z_2 = 3 - j\,5$

โดยที่เครื่องหมาย $+j$ และ $-j$ จะบอกทิศทาง ส่วนตัวเลข 2 และ 3 จะบอกขนาดความยาวของแกนนอนและแกนตั้งเขียนเป็นเวกเตอร์ได้ดังรูปที่ 2.10



รูปที่ 2.10 ตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนในรูปแกนมุมฉาก

ตัวอย่างที่ 2-1 จงหาตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ โดยกำหนดให้

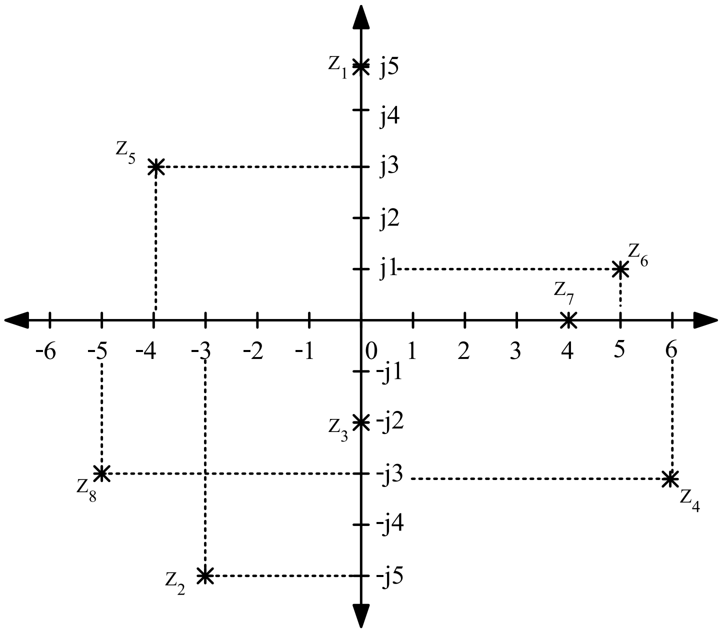
$Z_1 = 0 + j5$ $\quad Z_2 = -3 - j5$

$Z_3 = -j2$ $\quad Z_4 = 6 - j3$

$Z_5 = -4 + j3$ $\quad Z_6 = 5 + j1$

$Z_7 = 4$ $\quad Z_8 = -5 - j3$

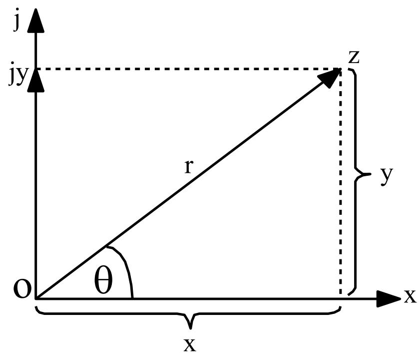
วิธีทำ



รูปที่ 2.11 ตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อน ตัวอย่างที่ 2-1 **ตอบ**

2.4.2 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว (Polar Form)

เป็นการแสดงปริมาณเวกเตอร์ด้วยขนาดและทิศทางที่ชัดเจน สามารถอ่านค่าออกมาได้โดยตรงจากค่าที่แสดงไว้เป็นรูปแบบที่นิยมใช้บอกค่าต่างๆในการคำนวณทางไฟฟ้า



รูปที่ 2.12 จำนวนเชิงซ้อนในรูปของเชิงขั้ว

จากรูปที่ 2.12 สามารถเขียนรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว คือ

$$Z = r \angle \theta \tag{2-3}$$

เมื่อ r คือ ขนาดของปริมาณเวกเตอร์

θ คือ ขนาดมุมของ Z มีหน่วยเป็นองศา

2.5 วิธีบวกและลบจำนวนเชิงซ้อน

การบวกและลบจำนวนเชิงซ้อนจะต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบแกนมุมฉากเท่านั้น โดยนำค่าที่เป็นจำนวนจริงมาบวก ลบกัน และส่วนที่เป็นจำนวนจินตภาพก็ให้บวกลบเช่นกัน

ตัวอย่างที่ 2-2 จงหาผลบวกและลบ จำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

ก. $(2+j3)+(6+j5)$

ข. $(-4-j4)+(3+j2)$

ค. $(2-j8)-(-3-j4)$

ง. $(-2-j2)-(4+j6)$

วิธีทำ

ก.

$$\begin{aligned}(2+j3)+(6+j5) &= (2+6)+j(3+5)\\ &= 8+j8\end{aligned}$$ **ตอบ**

ข.

$$\begin{aligned}(-4-j4)+(3+j2) &= ((-4)+3)+j((-4)+2)\\ &= -1-j2\end{aligned}$$ **ตอบ**

ค.

$$\begin{aligned}(6-j8)-(-3-j4) &= (6-(-3))+j((-8)-(-4))\\ &= 9-j4\end{aligned}$$ **ตอบ**

ง.

$$\begin{aligned}(-2-j2)-(4+j6) &= ((-2)-4)-j((-2)-6)\\ &= -6-j8\end{aligned}$$ **ตอบ**

2.6 วิธีคูณของจำนวนเชิงซ้อน

การคูณจำนวนเชิงซ้อนจะต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้ว วิธีการคูณ สามารถทำได้โดยการนำค่า r คูณกัน และนำค่ามุมบวกกัน เช่น

$$r_1 \angle\theta_1 \times r_2 \angle\theta_2 = (r_1 \times r_2)\angle(\theta_1 + \theta_2)$$

ตัวอย่างที่ 2-3 จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

ก. $3\angle 15^\circ \times 5\angle 30^\circ$

ข. $10\angle 120^\circ \times 5\angle -30^\circ$

วิธีทำ

ก.

$$3\angle 15^\circ \times 5\angle 30^\circ = (3 \times 5)\angle(15^\circ + 30^\circ)$$
$$= 15\angle 45^\circ$$ **ตอบ**

ข.

$$10\angle 120^\circ \times 5\angle -30^\circ = (10 \times 5)\angle(120^\circ + (-30^\circ))$$
$$= 50\angle 90^\circ$$ **ตอบ**

2.7 วิธีหารของจำนวนเชิงซ้อน

การหารจำนวนเชิงซ้อนจะต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้ว วิธีการหาร สามารถทำได้โดยการนำค่า r หารกัน และนำค่ามุมลบกัน เช่น

$$r_1 \angle\theta_1 \div r_2 \angle\theta_2 = (r_1 \div r_2)\angle(\theta_1 - \theta_2)$$

ตัวอย่างที่ 2-4 จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

ก. $10\angle 90^\circ \div 2\angle 30^\circ$

ข. $20\angle 120^\circ \div 5\angle -60^\circ$

วิธีทำ

ก.

$$10\angle 90^\circ \div 2\angle 30^\circ = (10 \div 2)\angle(90^\circ - 30^\circ)$$
$$= 5\angle 60^\circ$$ **ตอบ**

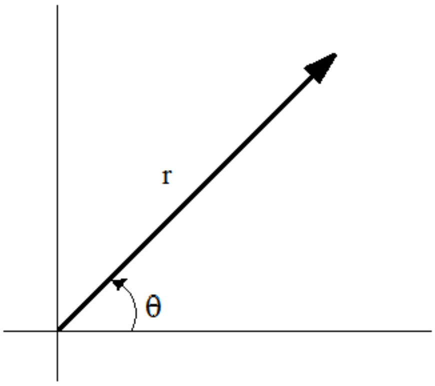
ข.

$$20\angle 120^\circ \div 5\angle -60^\circ = (20 \div 5)\angle(120^\circ - (-60^\circ))$$
$$= 4\angle 180^\circ$$ **ตอบ**

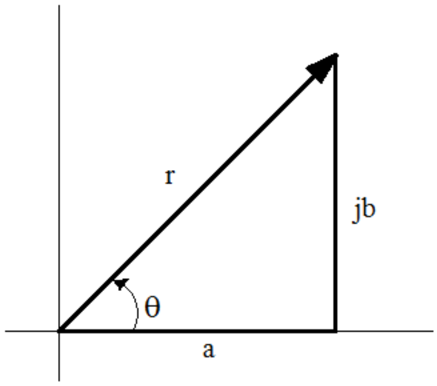
2.8 วิธีเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนเชิงขั้ว (Polar Form) เป็นแกนมุมฉาก (Rectangular Form)

การเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนเชิงขั้ว(Polar Form) เป็นแกนมุมฉาก(Rectangular Form) เป็นวิธีการหนึ่งที่จะทำให้เราสามารถทำการบวกหรือลบจำนวนเชิงซ้อนแบบเชิงขั้วได้เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนแบบเป็นแกนมุมฉากจะสามารถทำการ บวกและลบได้

โดยการใช้ตรีโกณมิติ ความยาว r ของเฟสเซอร์เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีด้านประกอบมุมฉากในแกนนอนยาว a และด้านประกอบมุมฉากในแกนตั้งยาว jb ดังแสดง ในรูป 2.13



(ก) Polar Form $r\angle\theta$



(ข) Rectangular Form a +jb

รูปที่ 2.13 การเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนเชิงขั้ว เป็นแกนมุมฉาก

ด้านประกอบมุมฉากในแกนนอน บางครั้งเรียกว่า จำนวนจริง (Real Number) ของเฟสเซอร์ซึ่งขนาดของมันมีค่าเท่ากับ

$$|a| = r\cos\theta$$

ด้านประกอบมุมฉากในแกนตั้ง บางครั้งเรียกว่า จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number) ของเฟสเซอร์ซึ่งขนาดของมันมีค่าเท่ากับ

$$|b| = r\sin\theta$$

ดังนั้น การเขียนเฟสเซอร์ในรูปของจำนวนเชิงซ้อนแกนมุมฉาก(Rectangular Form) จะได้ดังนี้

$$a + jb = (r\cos\theta) + j(r\sin\theta)$$

ส่วนประกอบที่ได้นี้เราสามารถเขียนแสดงเป็นรูปของจำนวนเชิงซ้อนเชิงขั้ว(Polar Form)ได้เช่นเดียวกัน จึงได้สมาการสำหรับการเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนเชิงขั้ว(Polar Form) ให้เป็นแบบแกนมุมฉาก(Rectangular Form) ดังสมการที่ 2-4

สมการ 2-4

$$r\angle\theta = (r\cos\theta) + j(r\sin\theta) \qquad (2\text{-}4)$$

ตัวอย่างที่ 2-6 จงเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนแบบเชิงขั้ว (Polar Form) เป็นแกนมุมฉาก (Rectangular Form)

ก. $5\angle 30^\circ$

ข. $6\angle -60^\circ$

วิธีทำ

ก. $5\angle 30^\circ$

จากสมการ 2-4 $r\angle\theta = (r\cos\theta)j(r\sin\theta)$

เมื่อ $r = 5$ และ $\theta = 30^\circ$

$$r\angle\theta = (5\cos 30^\circ) + j(5\sin 30^\circ)$$

$$= 4.33 + j2.5$$ **ตอบ**

ข. $6\angle -60^\circ$

จากสมการ 2-4 $r\angle\theta = (r\cos\theta) + j(r\sin\theta)$

แทนค่า $r=6$ และ $\theta= -60^\circ$

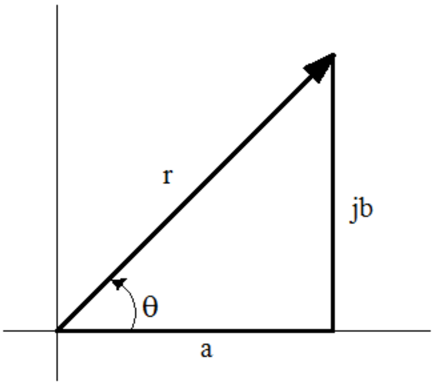
$$r\angle\theta = (6\cos -60^\circ) + j(6\sin -60^\circ)$$

$$= 3 + j(-5.196)$$

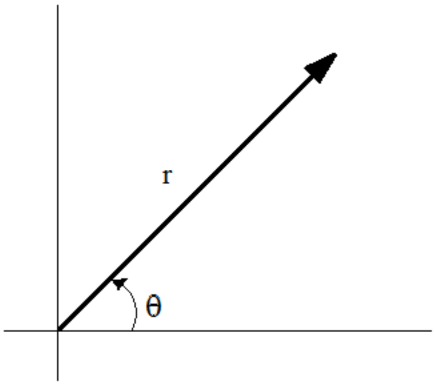
$$= 3 - j5.196$$ **ตอบ**

2.9 วิธีเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนแกนมุมฉาก (Rectangular Form) เป็นเชิงขั้ว (Polar Form)

การเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนแกนมุมฉาก(Rectangular Form)เป็นเชิงขั้ว(Polar Form) เป็นวิธีการหนึ่งที่จะทำให้เราสามารถทำการคูณหรือหารจำนวนเชิงซ้อนแบบแกนมุมฉากได้ เนื่องจาก จำนวนเชิงซ้อนแบบเชิงขั้วจะสามารถทำการ คูณและหารได้ โดยการใช้ตรีโกณมิติ ดังแสดงในรูป 2.14



(ก) Rectangular Form a +jb



(ข) Polar Form $r\angle\theta$

รูปที่ 2.14 การเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนแกนมุมฉากเป็นเชิงขั้ว

จากรูปที่ 2.14 สามารถเขียนความสัมพันธ์ได้ดังนี้

$$r^2 = a^2 + b^2 \qquad (2\text{-}5)$$

หรือ

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (2\text{-}6)$$

และ

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad (2\text{-}7)$$

หรือ

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} \qquad (2\text{-}8)$$

ดังนั้นสมาการสำหรับการเปลี่ยนรูปจำนวนเชิงซ้อนแกนมุมฉาก(Rectangular Form)เป็นเชิงขั้ว(Polar Form) เขียนได้ดัง สมการที่ 2-9

สมการ 2-9

$$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2}\ \angle \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \qquad (2\text{-}9)$$

ตัวอย่างที่ 2-7 จงเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนแกนมุมฉาก(Rectangular Form)เป็นเชิงขั้ว (Polar Form)

ก. $4.33 + j2.5$

ข. $3 - j5.196$

วิธีทำ

ก. $4.33 + j2.5$

จากสมการ 2-9 $$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2}\ \angle \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

เมื่อ $a = 4.33$ และ $b = 2.5$

$$a + jb = \sqrt{4.33^2 + 2.5^2}\ \angle \tan^{-1}\left(\frac{2.5}{4.33}\right)$$

$$= 5\ \angle \tan^{-1} 0.577$$

$$= 5 \angle 30^\circ$$

ตอบ

ข. $3 - j5.196$

จากสมการ 2-9 $$a + jb = \sqrt{a^2 + b^2}\ \angle \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

เมื่อ $a = 3$ และ $b = -5.196$

$$a + jb = \sqrt{3^2 + (-5.196)^2}\ \angle \tan^{-1}\left(\frac{-5.196}{3}\right)$$

$$= 6\ \angle \tan^{-1} - 1.732$$

$$= 6\ \angle - 60^\circ$$

ตอบ

สรุปสาระสำคัญ

เฟส เป็นปริมาณทางไฟฟ้าที่แสดงเป็นรูปคลื่น ซึ่งมีความสัมพันธ์กันในเทอมของเวลา ในแกนเดียวกันระหว่างรูปคลื่นสองรูปคลื่นขึ้นไป จึงทำให้เกิดลักษณะ เฟสร่วมกัน (In Phase) เฟสต่างกัน (Out Of phase) และเฟสด้านกลับ แอนตีเฟส (Anti phase)

เฟสเซอร์ไดอะแกรม คือเวกเตอร์ ที่แทนปริมาณและทิศทางของ ไฟฟ้าต่าง โดยส่วนมากมักเขียนแทนเฟสเพื่อช่วยและอธิบายหลักการคำนวณและหาค่าต่างๆในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับ

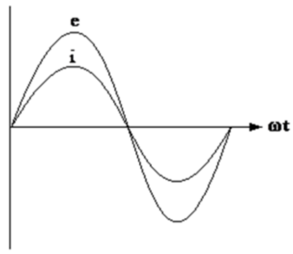
จำนวนเชิงซ้อนจะประกอยด้วย จำนวนจริงและจำนวนจินตภาพ จำนวนเชิงซ้อนที่ใช้ในการคำนวณของวงจรไฟฟ้ากระแสสลับจะถูกจัดให้อยู่รูปแกนมุมฉาก(Rectangular Form) และเชิงขั้ว (Polar Form) และเนื่องจากของจำกัดในการคำนวณของจำนวนเชิงซ้อนทั้งสอง คือถ้าจะทำการบวกหรือลบจำนวนเชิงซ้อน ต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบแกนมุมฉากเท่านั้น และหากต้องการ คูณหรือหารจำนวนเชิงซ้อนจะต้องจัดให้อยู่ในรูปของเชิงขั้ว จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำการเปลี่ยนรูปของจำนวนเชิงซ้อนในกรณีที่ไม่ตรงกับความต้องการ

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

คำชี้แจงแบบฝึกหัด

- แบบฝึกหัดมี 10 ข้อ เวลา 10 นาที
- เลือกคำตอบที่ถูกที่สุดและทำเครื่องหมาย × ในกระดาษคำตอบ

1. จากรูปเฟสของ e และ i อยู่ในลักษณะ



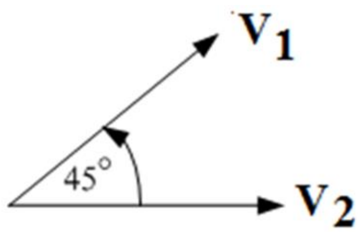
ก. เฟสร่วมกัน (In Phase)

ข. เฟสนำหน้า (Leading Relationship)

ค. เฟสล้าหลัง (Lagging Relationship)

ง. แอนตีเฟส (Anti Phase)

2. จากรูปเฟสเซอร์ไดอะแกรมมีลักษณะ



ก. V_1 ล้าหลัง V_2 เป็นมุม 45°

ข. V_2 นำหน้า V_1 อยู่ที่มุม 45°

ค. V_2 ล้าหลัง V_1 เป็นมุม 45°

ง. V_1 นำหน้า V_2

3. ข้อใดเป็นจำนวนจินตภาพ (Imaginary Number)

ก. $\sqrt{4}$

ข. $\sqrt{-1}$

ค. π

ง. $\sqrt{1}$

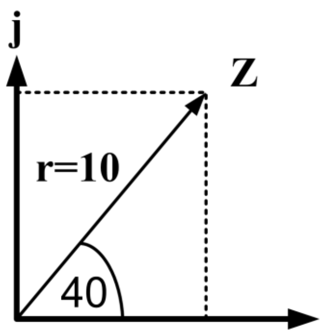
4. จากรูปถ้า r=10 และ θ=-40° ถ้าเขียนเป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว(Polar Form)

ก. $10\ \angle{-40^\circ}$

ข. 10+j40

ค. $10\ \angle{40^\circ}$

ง. 10-j40



5. (15+j2)+(30+j4)=
    ก. 19+j32
    ข. 45-j6
    ค. 19-j32
    ง. 45+j6
6. (30+j20)-(10+j15)=
    ก. 20-j5
    ข. 15+j10
    ค. 20+j5
    ง. 15-j10
7. $20\angle 50^\circ \times 3\angle 40^\circ =$
    ก. $60\angle 90^\circ$
    ข. $60\angle 2000^\circ$
    ค. $60\angle 10^\circ$
    ง. $60\angle -10^\circ$
8. $10\angle 30^\circ \div 2\angle 10^\circ =$
    ก. $5\angle 3^\circ$
    ข. $8\angle 20^\circ$
    ค. $5\angle 20^\circ$
    ง. $8\angle 3^\circ$
9. เปลี่ยน $40\angle 90^\circ$ ให้อยู่ในรูปแกนมุมฉาก
    ก. 40+j0
    ข. 9.84+j66
    ค. 66+j9.84
    ง. 0+ j40
10. เปลี่ยน 0+j20 ให้อยู่ในรูปแบบเชิงขั้ว
    ก. $20\angle 0^\circ$
    ข. $0\angle 0^\circ$
    ค. $20\angle 90^\circ$
    ง. $20\angle -90^\circ$