แบบทดสอบก่อนเรียน

หน่วยที่ 4 ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์

จงเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียง 1 ข้อ

1. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ det B มีค่าเท่าใด

ก. 2 ข. 10

ค. -2 ง. -10

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ det B มีค่าเท่าใด

ก. 4 ข. 7

ค. 14 ง. 10

3. กำหนดให้ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ไมเนอร์ M_{13} ของแมททริกซ์ C คือข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ง. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

4. จากข้อ 3. โคแฟกเตอร์ C_{13} ของแมททริกซ์ C มีค่าเท่าใด

ก. -2 ข. -4

ค. 2 ง. 4

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา det A

ก. -10 ข. 10

ค. -22 ง. 22

จงใช้ กฎของคราเมอร์แก้ระบบสมการต่อไปนี้ แล้ว ใช้สำหรับคำถามข้อ 6 – 10

$$3a-b-c = 10 \qquad ....(1)$$

$$a-3b+c = 0 \qquad ....(2)$$

$$a+b-3c = 0 \qquad ....(3)$$

6. Δ มีค่าเท่าใด

ก. 16 ข. 13

ค. 22 ง. 19

7. Δa มีค่าเท่าใด

ก. 40 ข. 80

ค. 20 ง. 60

8. Δb มีค่าเท่าใด

ก. 40 ข. 80

ค. 20 ง. 60

9. Δc มีค่าเท่าใด

ก. 40 ข. 80

ค. 20 ง. 60

10. a มีค่าเท่าใด

ก. 10 ข. 20

ค. 5 ง. 2.5

หน่วยที่ 4 ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์

สาระสำคัญ

ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์เป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้แก้ปัญหาในระบบสมการที่ซับซ้อน เนื่องจากมีตัวแปรมากกว่า 1 ตัว การศึกษาวิธีการและขั้นตอนนั้นประกอบด้วย ดีเทอร์มิแนนต์ ไมเนอร์ โคแฟกเตอร์ การหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการลดขนาด การแก้สมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์

เนื้อหาสาระ

4.1 ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์

4.2 ไมเนอร์ของสมาชิกของแมททริกซ์จัตุรัส

4.3 โคแฟกเตอร์ของสมาชิกของแมททริกซ์จัตุรัส

4.4 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยการลดขนาด

4.5 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์

จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้และเข้าใจในเรื่อง :

4.1 ดีเทอร์มิแนนต์ และแมททริกซ์

4.2 ไมเนอร์ของสมาชิกของแมททริกซ์จัตุรัส

4.3 โคแฟกเตอร์ของสมาชิกของแมททริกซ์จัตุรัส

4.4 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยการลดขนาด

4.5 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม หลังจากเรียนจบหน่วยเรียนนี้แล้ว ผู้เรียนควรมีความสามารถดังนี้

4.1 หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมททริกซ์ ได้

4.2 หาค่าไมเนอร์ของสมาชิกของแมททริกซ์จัตุรัสได้

4.3 หาค่าโคแฟกเตอร์ของสมาชิกของแมททริกซ์จัตุรัสได้

4.4 หาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยการลดขนาดได้

4.5 แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์ได้

หน่วยที่ 4 ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์

แมททริกซ์เป็นวิธีการทางคณิตศาสตร์ สำหรับแก้ปัญหาในระบบสมการที่ซับซ้อน อย่างเช่น ในโครงข่ายวงจรไฟฟ้า ที่ประกอบด้วยโหลดหลายๆ ตัว และแหล่งจ่ายพลังงานหลายๆ ตัว ประกอบกันเป็นระบบที่ใหญ่ การใช้แมททริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ ในการแก้ปัญหาจะทำได้อย่างสะดวกและรวดเร็ว สามารถช่วยลดความยุ่งยากได้เป็นอย่างมาก เป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสูง หากผู้ใช้ศึกษาให้เข้าใจและมีความชำนาญ

4.1 ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์

4.1.1 แมททริกซ์

แมททริกซ์ หมายถึง กลุ่มของจำนวนใดๆ ที่นำมาเรียงกันเป็นแถวและหลักอย่างเป็นระเบียบ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งแต่ละแถวหรือหลักประกอบด้วยจำนวนเท่าๆ กัน โดยมีเครื่องหมาย [ ] ล้อมรอบจำนวนเหล่านั้นไว้ ตัวอย่างของแมททริกซ์เช่น

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นแมททริกซ์ขนาด 2×2 หมายถึงแมททริกซ์ขนาด 2 แถว คูณ 2 หลัก

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นแมททริกซ์ขนาด 3×3 หมายถึงแมททริกซ์ขนาด 3 แถว คูณ 3 หลัก

$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 7 & 5 & 3 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นแมททริกซ์ขนาด 4×4 หมายถึงแมททริกซ์ขนาด 4 แถว คูณ 4 หลัก

สัญลักษณ์ของแมททริกซ์

ถ้ากำหนดให้ A เป็นแมททริกซ์ประกอบด้วย m แถว และ n หลัก เขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{แถวที่ 1} \\ \leftarrow \text{แถวที่ 2} \\ \leftarrow \text{แถวที่ 3} \\ \\ \leftarrow \text{แถวที่ n} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & \text{หลักที่ 3} & \text{หลักที่ m} \end{array} \end{array}$$

แมททริกซ์ที่ประกอบไปด้วย m แถว และ n หลักเราเรียกว่า $m \times n$ แมททริกซ์ หรือแมททริกซ์ขนาด $m \times n$ นิยมเขียนเป็นสัญลักษณ์ย่อๆ ได้ดังนี้

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{m \times n} \quad \text{หรือ} \quad A_{m \times n}$$

4.1.2 ดีเทอร์มิแนนต์

นิยาม กำหนดให้ A เป็นแมททริกซ์จัตุรัสใดๆ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A เขียนแทนด้วย ΔA หรือ $\det A$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ แล้วหา $\det A$ ได้ดังนี้

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{22}$$

ตัวอย่างที่ 4.1 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของแมททริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = +(2)(-4) - (6)(5)$$

$$= -8 - 30$$

$$\therefore \ \det A = -38$$ ....**<u>ตอบ</u>**

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +(2)(4) - (1)(-3)$$

$$= 8 + 3$$

$$\therefore \ \det B = 11$$ ....**<u>ตอบ</u>**

ดีเทอร์มิแนนต์ของแมททริกซ์ขนาด 3×3

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ แล้วหา $\det A$ ได้ดังนี้

$$\begin{array}{c} \quad - \quad - \quad - \\ \det A = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right. \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \\ \quad + \quad + \quad + \end{array}$$

การคิดเครื่องหมายเช่นเดียวกับกรณีแมททริกซ์ 2×2 คือคูณลงเป็นบวก คูณขึ้นเป็นลบ จะได้

$$\det A = +(a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13}) - (a_{32}a_{23}a_{11}) - (a_{33}a_{21}a_{12})$$

ตัวอย่างที่ 4.2 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของแมททริกซ์ A และ B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ นำ 2 หลักแรกมาต่อถัดจากหลักที่ 3 ในแมททริกซ์ A จะได้

$$\det A = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 & 4 & 0 \\ 6 & -4 & 3 & 6 & -4 \end{array}\right.$$

$$= +(1)(0)(3)+(-2)(-1)(6)+(3)(4)(-4)-(6)(0)(3)-(-4)(-1)(1)-(3)(4)(-2)$$

$$= 0+12+(-48)-0-4-(-24)$$

$\therefore \ \det A = 12-48-4+24 = -16$ ....**<u>ตอบ</u>**

นำ 2 หลักแรกมาต่อถัดจากหลักที่ 3 ในแมททริกซ์ B จะได้

$$\det B = \left|\begin{array}{rrr|rr} -1 & 3 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 6 & -4 & 3 & 6 & -4 \end{array}\right.$$

$$= +(-1)(-1)(3)+(3)(0)(6)+(2)(2)(-4)-(6)(-1)(2)-(-4)(0)(-1)-(3)(2)(3)$$

$$= +(3)+(0)+(-16)-(-12)-(0)-(18)$$

$\therefore \ \det B = 3-16+12-18 = -19$ ....**<u>ตอบ</u>**

4.2 ไมเนอร์ (minor) ของสมาชิกของแมททริกซ์จัตุรัส

นิยาม ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ หรือ A เป็นแมททริกซ์จัตุรัส ไมเนอร์ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของสมาชิก A ที่เหลือจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออกไปไมเนอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย M_{ij}

ตัวอย่างที่ 4.3 กำหนดแมททริกซ์ B จงหาไมเนอร์ของสมาชิก B ทั้งหมด

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{11} = 1$ ได้จากการตัดแถวที่ 1 หลักที่ 1

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{12} = -4$ ได้จากการตัดแถวที่ 1 หลักที่ 2

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{21} = 5$ ได้จากการตัดแถวที่ 2 หลักที่ 1

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{22} = 6$ ได้จากการตัดแถวที่ 2 หลักที่ 2

ตัวอย่างที่ 4.4 กำหนดแมททริกซ์ A จงหา M_{13} , M_{22} , M_{32}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ หา M_{13} ตัดแถวที่ 1 หลักที่ 3 ออกไป

จะได้ $M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}$

$$= +(4)(-4)-(6)(0)$$

$\therefore\ M_{13} = -16-0 = -16$ ....**<u>ตอบ</u>**

หา M_{22} ตัดแถวที่ 2 หลักที่ 2 ออกไป

จะได้ $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$

$$= +(1)(3)-(6)(3)$$

$\therefore\ M_{22} = 3-18 = -15$ ....**<u>ตอบ</u>**

หา M_{32} ตัดแถวที่ 3 หลักที่ 2 ออกไป

จะได้ $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$

$$= +(1)(-1)-(4)(3)$$

$\therefore\ M_{32} = -1-12 = -13$ ....**<u>ตอบ</u>**

4.3 โคแฟกเตอร์ (Cofactor) ของสมาชิกของแมททริกซ์จัตุรัส

นิยาม ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ หรือ A เป็นแมททริกซ์จัตุรัสโคแฟกเตอร์ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย C_{ij} หาได้จาก

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

ตัวอย่างที่ 4.5 กำหนดแมทริกซ์ B จงหาโคแฟกเตอร์ของสมาชิก B ทุกตัว

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11}$$

$$C_{11} = (-1)^{2}(3)$$

$$C_{11} = (1)(3) = 3 = M_{11}$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$$

$$C_{12} = (-1)^{3}(-5)$$

$$C_{12} = (-1)(-5) = 5 = -M_{12}$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$$

$$C_{21} = (-1)^{3}(4)$$

$$C_{21} = (-1)(4) = -4 = -M_{21}$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}$$

$$C_{22} = (-1)^{4}(2)$$

$$C_{22} = (1)(2) = 2 = M_{22}$$

สรุป 1) ถ้า $i+j$ เป็นเลขคู่ แล้ว $C_{ij} = M_{ij}$ (เครื่องหมายเหมือนกัน)

2) ถ้า $i+j$ เป็นเลขคี่ แล้ว $C_{ij} = -M_{ij}$ (เครื่องหมายตรงกันข้าม)

3) การคิดเครื่องหมายของ C_{ij} เทียบกับ M_{ij} สรุปเป็นแผนผังได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

แมททริกซ์ขนาด 3×3 แมททริกซ์ขนาด 4×4

4.4 การหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการลดขนาด

นิยาม ถ้า A เป็นแมททริกซ์จัตุรัสขนาด $n\times n\ (n \ge 2)$ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A เท่ากับผลบวกของผลคูณของสมาชิกในแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) กับโคแฟกเตอร์ของสมาชิกตัวนั้น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1j}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2j}\cdots a_{2n} \\ a_{i1} & a_{i2}\cdots & a_{ij}\cdots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nj}\quad \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

เลือกแถวที่ i $\det A = a_{i1}c_{i1}+a_{i2}c_{i2}+\cdots+a_{ij}c_{ij}+\cdots+a_{in}c_{in}$

เลือกหลักที่ j $\det A = a_{1j}c_{1j}+a_{2j}c_{2j}+\cdots+a_{ij}c_{ij}+\cdots+a_{nj}c_{nj}$

ตัวอย่างที่ 4.6 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 7 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา det A โดยการลดขนาด

วิธีทำ เลือกแถวที่ 2 (เพราะแถวที่ 2 มีสมาชิกเป็นศูนย์ 2 ตัว)

$$\det A = \begin{vmatrix} \underset{-}{3} & \underset{+}{6} & \underset{-}{-2} \\ \boxed{0 \quad 4 \quad 0} \\ 7 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}c_{21}+a_{22}c_{22}-a_{23}c_{23}$$

เนื่องจาก $a_{21} = 0$ และ $a_{23} = 0$ จะได้

$$\det A = 0c_{21} + (a_{22})(c_{22}) + 0c_{23}$$

$$\det A = +4\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4[+(3)(2)-(7)(-2)]$$

$$= 4[+(6)-(-14)]$$

$$\therefore \det A = 4(20) = 80$$ ....**<u>ตอบ</u>**

4.5 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

การแก้ระบบสมการเชิงเส้น มีหลายวิธีด้วยกัน เช่น การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยวิธีของเกาส์ การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้อินเวอร์สของแมททริกซ์ และ การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยกฎของคราเมอร์ ในหน่วยนี้นักเรียนจะศึกษาการแก้ระบบสมการ โดยใช้กฎของคราเมอร์ ซึ่งง่ายและสะดวกเหมาะสำหรับสาขาไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์

รูปแบบของระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร เป็นดังนี้

$$a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z = b_1$$

$$a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z = b_2$$

$$a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z = b_3$$

โดยที่ x, y และ z คือตัวแปรที่ต้องการทราบค่า a และ b คือค่าคงที่ และใช้สัญลักษณ์ที่เรียกว่า เดลต้า (delta):Δ เป็นค่าดีเทอร์มิแนนต์ซึ่งสมาชิกประกอบด้วยสัมประสิทธิ์ของ x, y และ z เรียงตามลำดับจากหลักที่ 1 ถึงหลักที่ 3

จากรูปแบบระบบสมการเชิงเส้นข้างบน เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนในการหาค่า Δ, x, y และ z สรุปได้ดังนี้

1) หาเดลต้า : $$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

2) การหาค่า $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

การหา Δx ทำได้โดยการนำข้อมูลของหลัก b_1, b_2, b_3 มาแทนในหลักที่ 1 ในแมททริกซ์ของ Δ

ดังนี้ $$\Delta x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

การหา Δy ทำได้โดยการนำข้อมูลของหลัก b_1, b_2, b_3 มาแทนในหลักที่ 2 ในแมททริกซ์ของ Δ

ดังนี้ $$\Delta y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

การหา Δz ทำได้โดยการนำข้อมูลของหลัก b_1, b_2, b_3 มาแทนในหลักที่ 3 ในแมททริกซ์ของ Δ

ดังนี้ $$\Delta z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

3) หาคำตอบของสมการ เมื่อหาค่าต่างๆ ได้แล้ว คือ Δ , Δx , Δy , Δz ขั้นต่อไปคือ หาค่า x, y และ z ที่ทำให้สมการเป็นจริง

ซึ่งจะได้ $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$ และ $z = \dfrac{\Delta z}{\Delta}$

สำหรับระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร n สมการ ก็จะเป็นไปในทำนองเดียวกับระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร

ตัวอย่างที่ 4.7 จงหาคำตอบของระบบสมการ $2x - y = 4$

$3x + y = 5$

วิธีทำ เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ : $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = +(2)(1) - (3)(-1)$$

$$\Delta = +(2)-(-3) = 5$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = +(4)(1)-(5)(-1)$$

$$\Delta x = +(4)-(-5) = 9$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = +(2)(5)-(3)(4)$$

$$\Delta y = +(10)-(12) = -2$$

$$\therefore\ x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{9}{5}$$ .... **ตอบ**

$$\therefore\ y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-2}{5}$$ .... **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 4.8 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$x+y+z = 6$$

$$x+2y+3z = 14$$

$$x+4y+9z = 36$$

วิธีทำ เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \\ 36 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} \boxed{1\ \ 1\ \ 1} \\ 1\ \ 2\ \ 3 \\ 1\ \ 4\ \ 9 \end{vmatrix} \end{array}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = +(1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = +(1)\left[+(2)(9)-(4)(3)\right]-(1)\left[+(1)(9)-(1)(3)\right]+(1)\left[+(1)(4)-(1)(2)\right]$$

$$\Delta = +(18-12)-(9-3)+(4-2)$$

$$\Delta = +(6)-(6)+(2) = 2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 36 & 4 & 9 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 36 & 4 & 9 \end{vmatrix} = +(6)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 36 & 9 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 36 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = +(6)\left[+(2)(9)-(4)(3)\right]-(1)\left[+(14)(9)-(36)(3)\right]+(1)\left[+(14)(4)-(36)(2)\right]$$

$$\Delta x = +(6)\left[+(18)-(12)\right]-(1)\left[+(126)-(108)\right]+(1)\left[+(56)-(72)\right]$$

$$\Delta x = +(6)(6)-(1)(18)+(1)(-16)$$

$$\Delta x = 36-18-16 = 2$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 1 & 36 & 9 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 1 & 36 & 9 \end{vmatrix} = +(1)\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 36 & 9 \end{vmatrix} - (6)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 36 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = +(1)\left[+(14)(9)-(36)(3)\right]-(6)\left[+(1)(9)-(1)(3)\right]+(1)\left[+(1)(36)-(1)(14)\right]$$

$$\Delta y = +(1)\left[+(126)-(108)\right]-(6)\left[+(9)-(3)\right]+(1)\left[+(36)-(14)\right]$$

$$\Delta y = +(1)(18)-(6)(6)+(1)(22)$$

$$\Delta y = 18-36+22 = 4$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 14 \\ 1 & 4 & 36 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 14 \\ 1 & 4 & 36 \end{vmatrix} = +(1)\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 4 & 36 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 14 \\ 1 & 36 \end{vmatrix} + (6)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = +(1)\left[+(2)(36)-(4)(14)\right]-(1)\left[+(1)(36)-(1)(14)\right]+(6)\left[+(1)(4)-(1)(2)\right]$$

$$\Delta z = +(1)\left[+(72)-(56)\right]-(1)\left[+(36)-(14)\right]+(6)\left[+(4)-(2)\right]$$

$$\Delta z = +(1)(16)-(1)(22)+(6)(2)$$

$$\Delta z = 16-22+12 = 6$$

จะได้ $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{2}{2} = 1$ ....**<u>ตอบ</u>**

$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{4}{2} = 2$ ....**<u>ตอบ</u>**

และ $z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{6}{2} = 3$ ....**<u>ตอบ</u>**

ตัวอย่างที่ 4.9 จงหาคำตอบของระบบสมการ

$$3I_1 - 2I_2 + 0 = 10$$

$$-2I_1 + 9I_2 - 4I_3 = 0$$

$$-4I_2 + 9I_3 = 0$$

วิธีทำ เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ ได้ดังนี้ $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 4 \\ 0 & -4 & 9 \end{vmatrix} \end{array}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{vmatrix} = +(3)\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = +(3)\left[+(9)(9) - (-4)(-4)\right] - (-2)\left[+(-2)(9) - (0)(-4)\right] + (0)$$

$$\Delta = +(3)\left[+(81) - (16)\right] - (-2)\left[+(-18) - (0)\right] + (0)$$

$$\Delta = +(3)(65) + (2)(-18) + (0)$$

$$\Delta = 195 - 36 = 159$$

$$\Delta I_1 = \begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & 4 \\ 0 & -4 & 9 \end{vmatrix}$$ เลือกหลักที่ 1

$$\Delta I_1 = \begin{vmatrix} 10 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 9 \end{vmatrix} = +(10)\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 9 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 9 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_1 = +(10)\left[+(9)(9) - (-4)(-4)\right] - (0) + (0)$$

$$\Delta I_1 = +(10)\left[+(81) - (16)\right]$$

$$\Delta I_1 = (10)(65) = 650$$

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$ เลือกหลักที่ 2

$$\Delta I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 10 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -(10)\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_2 = -(10)\left[+(-2)(9) - (0)(-4)\right] + (0) - (0)$$

$$\Delta I_2 = -(10)(-18) + 0 - 0$$

$$\Delta I_2 = 180$$

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ -2 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$ เลือกหลักที่ 3

$$\Delta I_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 10 \\ -2 & 9 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix} = +(10)\begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\Delta I_3 = +(10)\left[+(-2)(-4)-(0)(9)\right]+(0)-(0)$$

$$\Delta I_3 = +(10)\left[+(8)-(0)\right]+(0)-(0)$$

$$\Delta I_3 = (10)(8) = 80$$

จะได้ $I_1 = \dfrac{\Delta I_1}{\Delta} = \dfrac{650}{159}$ ....**ตอบ**

$I_2 = \dfrac{\Delta I_2}{\Delta} = \dfrac{180}{159}$ ....**ตอบ**

และ $I_3 = \dfrac{\Delta I_3}{\Delta} = \dfrac{80}{159}$ ....**ตอบ**

สรุปสาระสำคัญ

ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์ เป็นเครื่องมือที่ใช้ในการแก้ปัญหาในระบบสมการที่มีตัวแปร ตั้งแต่ 2 ตัวแปรขึ้นไป โดยที่ค่าเดลต้า (Δ) ของแมททริกซ์นั้น ต้องไม่เป็น 0 การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ โดยการลดขนาด จะทำให้ช่วยลดความผิดพลาดลงได้ เพราะตัวเลขน้อยลง ถ้ามีสมาชิก ของแมททริกซ์ตัวใดตัวหนึ่งมีค่าเป็นศูนย์ การลดขนาดก็จะทำได้ง่ายขึ้น การแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้กฎของคราเมอร์ เหมาะสำหรับงานในสาขาไฟฟ้าและอิเล็กทรอนิกส์ ช่วยแก้ปัญหาได้สะดวกและรวดเร็ว

แบบฝึกหัด

หน่วยที่ 4 ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์

1. กำหนดแมททริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

จงหา det A , det B , det C , det D

2. กำหนดแมททริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา det A

3. กำหนดแมททริกซ์ A ให้ จงหา M_{12} , M_{21} , M_{32}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

4. กำหนดแมททริกซ์ B ให้ จงหา C_{12} , C_{22} , C_{31}

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

5. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมททริกซ์ต่อไปนี้ โดยการลดขนาด

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

6. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$x - y = 1$ ....(1)

$4x - 6y = 10$ ....(2)

7. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$4x + 2y = 7$ ....(1)

$3x - 3y = 3$ ....(2)

8. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$x + y + z = 6$ ....(1)

$2x - y + z = 3$ ....(2)

$-x + y + 2z = 7$ ....(3)

9. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$2x+3y+z = 11$ ....(1)

$2x+2y+3z = 15$ ....(2)

$4x-y+3z = 11$ ....(3)

10. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$2a+b+c = 0$ ....(1)

$4a+3b+2c = 2$ ....(2)

$2a-b-3c = 0$ ....(3)

คำตอบ 1) $\det A = -16$, $\det B = -8$, $\det C = -3$, $\det D = 16$

2) $\det A = -5$

3) $M_{12} = -3$, $M_{21} = -5$, $M_{32} = 1$

4) $C_{12} = 28$, $C_{22} = -2$, $C_{31} = 3$

5) $\det A = -16$

6) $\Delta = -2$, $x = -2$, $y = -3$

7) $\Delta = -18$, $x = 3/2$, $y = 1/2$

8) $\Delta = -7$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

9) $\Delta = 26$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

10) $\Delta = -8$, $a = -1/2$, $b = 2$, $c = -1$

แบบทดสอบหลังเรียน

หน่วยที่ 4 ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์

จงเลือกคำตอบที่ถูกที่สุดเพียง 1 ข้อ

1. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ det B มีค่าเท่าใด

ก. 2 ข. -10

ค. -2 ง. 10

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ det B มีค่าเท่าใด

ก. 4 ข. 14

ค. 7 ง. 10

3. กำหนดให้ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ ไมเนอร์ M_{13} ของแมททริกซ์ C คือข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ง. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

4. จากข้อ 3. โคแฟกเตอร์ C_{13} ของแมททริกซ์ C มีค่าเท่าใด

ก. -4 ข. -2

ค. 2 ง. 4

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา det A

ก. -22 ข. 10

ค. -10 ง. 22

จงใช้ กฎของคราเมอร์แก้ระบบสมการต่อไปนี้ แล้ว ใช้สำหรับคำถามข้อ 6 – 10

$3a-b-c = 10$ ....(1)

$a-3b+c = 0$ ....(2)

$a+b-3c = 0$ ....(3)

6. Δ มีค่าเท่าใด

ก. 19 ข. 13

ค. 22 ง. 16

7. Δa มีค่าเท่าใด

ก. 40 ข. 20

ค. 80 ง. 60

8. Δb มีค่าเท่าใด

ก. 80 ข. 40

ค. 20 ง. 60

9. Δc มีค่าเท่าใด

ก. 20 ข. 80

ค. 40 ง. 60

10. a มีค่าเท่าใด

ก. 10 ข. 20

ค. 2.5 ง. 5

เอกสารอ้างอิง

มนัส ประสงค์. (2558). **คณิตศาสตร์ 2.** กรุงเทพฯ : ศูนย์ส่งเสริมวิชาการ.

ธำรงศักดิ์ หมินก้าหรีม , อนุวัตน์ ทองสกุล . (2555). **คณิตศาสตร์อิเล็กทรอนิกส์.** กรุงเทพฯ : บริษัท พัฒนาวิชาการ.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2551). **คณิตศาสตร์ เล่ม 2** กลุ่มสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

Alan Jeffrey. **ESSENTIALS OF ENGIEERING MATHEMATICS**. Singapore. Chapman & Hall. 1992.

Erwin Kreyszig. **Advanced Engineering Mathematics.** (7 th. Ed.) John Wiley & Sons, Inc. Singapore. 1993.

ภาคผนวก

- เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
- เฉลยแบบฝึกหัดท้ายหน่วย

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียน									
1) ง	2) ข	3) ก	4) ข	5) ค	6) ก	7) ข	8) ก	9) ก	10) ค

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียน									
1) ข	2) ค	3) ง	4) ก	5) ก	6) ง	7) ค	8) ข	9) ค	10) ง

เฉลยแบบฝึกหัด

หน่วยที่ 4 ดีเทอร์มิแนนต์และแมททริกซ์

1. กำหนดแมททริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

จงหา det A , det B , det C , det D

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

$\det A = +(2)(-2) - (3)(4)$

$\therefore \det A = -4 - 12 = -16$ ....**<u>ตอบ</u>**

$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

$\det B = +(3)(-6) - (5)(-2)$

$\therefore \det B = -18 + 10 = -8$ ....**<u>ตอบ</u>**

$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$\det C = +(3)(-1) - (0)(-2)$

$\therefore \det C = -3 - 0 = -3$ ....**<u>ตอบ</u>**

$D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\det D = +(4)(3) - (2)(-2)$

$\therefore \det D = 12 + 4 = 16$ ....**<u>ตอบ</u>**

2. กำหนดแมททริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา det A

วิธีทำ $\det A = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 & 6 & 4 \end{array} \right.$

$\det A = +(2)(2)(3) + (3)(0)(6) + (1)(1)(4) - (6)(2)(1) - (4)(0)(2) - (3)(1)(3)$

$\det A = +(12) + (0) + (4) - (12) - (0) - (9)$

$\therefore \det A = 12 + 4 - 12 - 9 = -5$ ....**<u>ตอบ</u>**

3. กำหนดแมทริกซ์ A ให้ จงหา M_{12} , M_{21} , M_{32}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ หา M_{12} ตัดแถวที่ 1 หลักที่ 2 ออกไป

จะได้ $M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}$

$= +(1)(-3)-(6)(0)$

$\therefore\ M_{12} = -3-0 = -3$ ....**<u>ตอบ</u>**

หา M_{21} ตัดแถวที่ 2 หลักที่ 1 ออกไป

จะได้ $M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$

$= +(3)(-3)-(4)(-1)$

$\therefore\ M_{21} = -9+4 = -5$ ....**<u>ตอบ</u>**

หา M_{32} ตัดแถวที่ 3 หลักที่ 2 ออกไป

จะได้ $M_{32} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= +(2)(0)-(1)(-1)$

$\therefore\ M_{32} = 0+1 = 1$ ....**<u>ตอบ</u>**

4. กำหนดแมทริกซ์ B ให้ จงหา C_{12} ,C_{22} , C_{31}

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12}$

$C_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\left[+(1)(2)-(6)(5)\right]$

$C_{12} = (-1)(2-30) = (-1)(-28)$

$\therefore\ C_{12} = 28$ ....**<u>ตอบ</u>**

$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22}$

$C_{22} = (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = +(2)(2)-(6)(1)$

$\therefore\ C_{22} = (4)-(6) = -2$ ....**<u>ตอบ</u>**

$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31}$

$$C_{31} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = +(1)(5)-(2)(1)$$

$$\therefore\ C_{31} = (5)-(2) = 3$$ ....**ตอบ**

5. จงหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ของแมททริกซ์ต่อไปนี้ โดยการลดขนาด

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เลือกหลักที่ 3 (เพราะหลักที่ 3 มีสมาชิกเป็นศูนย์ 2 ตัว)

$$\det A = +a_{13}c_{13} - a_{23}c_{23} + a_{33}c_{33}$$

เนื่องจาก $a_{23} = 0$ และ $a_{33} = 0$ จะได้

$$\det A = a_{13}c_{13} + 0(c_{23}) + 0c_{33}$$

$$\det A = +(-1)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\left[+(1)(4)-(6)(-2)\right]$$

$$= -1(4+12)$$

$$\therefore\ \det A = -(16) = -16$$ ....**ตอบ**

6. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$x - y = 1$ ....(1)

$4x - 6y = 10$ ....(2)

วิธีทำ เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ : $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = +(1)(-6)-(4)(-1)$$

$$\Delta = -(6)-(-4) = -2$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 10 & -6 \end{vmatrix} = +(1)(-6)-(10)(-1)$$

$$\Delta x = -(6)-(-10) = 4$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = +(1)(10)-(4)(1)$$

$$\Delta y = +(10)-(4) = 6$$

$$\therefore\ x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{4}{-2} = -2$$ ....**ตอบ**

$$\therefore\ y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{6}{-2} = -3$$ ....**ตอบ**

7. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$4x+2y = 7 \qquad ....(1)$$

$$3x-3y = 3 \qquad ....(2)$$

วิธีทำ เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ : $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = +(4)(-3)-(3)(2)$$

$$\Delta = (-12)-(6) = -18$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = +(7)(-3)-(3)(2)$$

$$\Delta x = (-21)-(6) = -27$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = +(4)(3)-(3)(7)$$

$$\Delta y = +(12)-(21) = -9$$

$\therefore \ x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-27}{-18} = \dfrac{3}{2}$ ....**ตอบ**

$\therefore \ y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-9}{-18} = \dfrac{1}{2}$ ....**ตอบ**

8. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$x+y+z = 6 \qquad ....(1)$$

$$2x-y+z = 3 \qquad ....(2)$$

$$-x+y+2z = 7 \qquad ....(3)$$

วิธีทำ เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ : $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +(1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = +(1)\left[+(-1)(2)-(1)(1)\right]-(1)\left[+(2)(2)-(-1)(1)\right]+(1)\left[+(2)(1)-(-1)(-1)\right]$$

$$\Delta = +(-2-1)-(4+1)+(2-1)$$

$$\Delta = (-3)-(5)+(1) = -7$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = +(6)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = +(6)\left[+(-1)(2)-(1)(1)\right]-(1)\left[+(3)(2)-(7)(1)\right]+(1)\left[+(3)(1)-(7)(-1)\right]$$

$$\Delta x = +(6)\left[+(-2)-(1)\right]-(1)\left[+(6)-(7)\right]+(1)\left[+(3)-(-7)\right]$$

$$\Delta x = +(6)(-3)-(1)(-1)+(1)(10)$$

$$\Delta x = -18+1+10 = -7$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = +(1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - (6)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = +(1)\left[+(3)(2)-(7)(1)\right]-(6)\left[+(2)(2)-(-1)(1)\right]+(1)\left[+(2)(7)-(-1)(3)\right]$$

$$\Delta y = +(1)\left[+(6)-(7)\right]-(6)\left[+(4)-(-1)\right]+(1)\left[+(14)-(-3)\right]$$

$$\Delta y = +(1)(-1)-(6)(5)+(1)(17)$$

$$\Delta y = -1-30+17 = -14$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = +(1)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} + (6)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = +(1)\left[+(-1)(7)-(1)(3)\right]-(1)\left[+(2)(7)-(-1)(3)\right]+(6)\left[+(2)(1)-(-1)(-1)\right]$$

$$\Delta z = +(1)\left[+(-7)-(3)\right]-(1)\left[+(14)-(-3)\right]+(6)\left[+(2)-(1)\right]$$

$$\Delta z = +(1)(-10)-(1)(17)+(6)(1)$$

$$\Delta z = -10-17+6 = -21$$

จะได้ $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta} = \dfrac{-7}{-7} = 1$ ....**<u>ตอบ</u>**

$y = \dfrac{\Delta y}{\Delta} = \dfrac{-14}{-7} = 2$ ....**<u>ตอบ</u>**

และ $z = \dfrac{\Delta z}{\Delta} = \dfrac{-21}{-7} = 3$ ....**<u>ตอบ</u>**

9. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$2x+3y+z = 11 \qquad \text{................(1)}$$

$$2x+2y+3z = 15 \qquad \text{................(2)}$$

$$4x-y+3z = 11 \qquad \text{................(3)}$$

วิธีทำ เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ : $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 15 \\ 11 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = +(2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = +(2)\left[+(2)(3)-(-1)(3)\right]-(3)\left[+(2)(3)-(4)(3)\right]+(1)\left[+(2)(-1)-(4)(2)\right]$$

$$\Delta = +(2)\left[+(6)-(-3)\right]-(3)\left[+(6)-(12)\right]+(1)\left[+(-2)-(8)\right]$$

$$\Delta = +(2)(9)-(3)(-6)+(1)(-10)$$

$$\Delta = 18+18-10 = 26$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 15 & 2 & 3 \\ 11 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 15 & 2 & 3 \\ 11 & -1 & 3 \end{vmatrix} = +(11)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 15 & 2 \\ 11 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x = +(11)\left[+(2)(3)-(-1)(3)\right]-(3)\left[+(15)(3)-(11)(3)\right]+(1)\left[+(15)(-1)-(11)(2)\right]$$

$$\Delta x = +(11)\left[+(6)-(-3)\right]-(3)\left[+(45)-(33)\right]+(1)\left[+(-15)-(22)\right]$$

$$\Delta x = +(11)(9)-(3)(12)+(1)(-37)$$

$$\Delta x = 99-36-37 = 26$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 2 & 15 & 3 \\ 4 & 11 & 3 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 1 \\ 2 & 15 & 3 \\ 4 & 11 & 3 \end{vmatrix} = +(2)\begin{vmatrix} 15 & 3 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} - (11)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 4 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = +(2)\left[+(15)(3)-(11)(3)\right]-(11)\left[+(2)(3)-(4)(3)\right]+(1)\left[+(2)(11)-(4)(15)\right]$$

$$\Delta y = +(2)[+(45)-(33)]-(11)[+(6)-(12)]+(1)[+(22)-(60)]$$

$$\Delta y = +(2)(12)-(11)(-6)+(1)(-38)$$

$$\Delta y = 24+66-38 = 52$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 2 & 2 & 15 \\ 4 & -1 & 11 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 2 & 2 & 15 \\ 4 & -1 & 11 \end{vmatrix} = +(2)\begin{vmatrix} 2 & 15 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} -(3)\begin{vmatrix} 2 & 15 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} +(11)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z = +(2)[+(2)(11)-(-1)(15)]-(3)[+(2)(11)-(4)(15)]+(11)[+(2)(-1)-(4)(2)]$$

$$\Delta z = +(2)[+(22)-(-15)]-(3)[+(22)-(60)]+(11)[+(-2)-(8)]$$

$$\Delta z = +(2)(37)-(3)(-38)+(11)(-10)$$

$$\Delta z = 74+114-110 = 78$$

ดังนั้น $x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1$ ....**<u>ตอบ</u>**

$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{52}{26} = 2$ ....**<u>ตอบ</u>**

และ $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3$ ....**<u>ตอบ</u>**

10. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้โดยใช้กฎของคราเมอร์

$2a+b+c = 0$ ....(1)

$4a+3b+2c = 2$ ....(2)

$2a-b-3c = 0$ ....(3)

วิธีทำ เขียนให้อยู่ในรูปสมการแมททริกซ์ : $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$ เลือกแถวบนสุด

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = +(2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} -(1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} +(1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = +(2)[+(3)(-3)-(-1)(2)]-(1)[+(4)(-3)-(2)(2)]+(1)[+(4)(-1)-(2)(3)]$$

$$\Delta = +(2)[+(-9)-(-2)]-(1)[+(-12)-(4)]+(1)[+(-4)-(6)]$$

$$\Delta = +(2)(-7)-(1)(-16)+(1)(-10)$$

$$\Delta = -14+16-10 = -8$$

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$ เลือกหลัก 1

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = +(0)-(2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}+(0)$$

$$\Delta a = -(2)\left[+(1)(-3)-(-1)(1)\right]$$

$$\Delta a = -(2)(-2) = 4$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$ เลือกหลัก 2

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -(0)+(2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}-(0)$$

$$\Delta b = +(2)\left[+(2)(-3)-(2)(1)\right]$$

$$\Delta b = +(2)(-6-2)$$

$$\Delta b = (2)(-8) = -16$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$ เลือกหลัก 3

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = +(0)-(2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+(0)$$

$$\Delta c = -(2)\left[+(2)(-1)-(2)(1)\right]$$

$$\Delta c = -(2)(-2-2)$$

$$\Delta c = -(2)(-4) = 8$$

ดังนั้น $a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$ ....**<u>ตอบ</u>**

$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2$ ....**<u>ตอบ</u>**

และ $c = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1$ ....**<u>ตอบ</u>**