แบบทดสอบก่อนเรียน

หน่วยที่ 8 จำนวนเชิงซ้อน

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. จงแปลงจำนวนเชิงซ้อนรูป แกนมุมฉาก $3+j4$ ให้อยู่ในรูป เชิงขั้ว

ก. $-5\angle -53.13^\circ$ ข. $5\angle -53.13^\circ$

ค. $5\angle 53.13^\circ$ ง. $5\angle 36.86^\circ$

2. จงแปลงจำนวนเชิงซ้อนรูป เชิงขั้ว $7.2\angle 56.3^\circ$ ให้อยู่ในรูป แกนมุมฉาก

ก. $-4-j6$ ข. $-4+j6$

ค. $4-j6$ ง. $4+j6$

3. จงหาผลบวกของ $(3-j4)+(-5+j6)$

ก. $-2+j2$ ข. $2+j2$

ค. $-1-j2$ ง. $2-j1$

4. จงหาผลลบของ $(5+j5)+(7.07\angle -45^\circ)$

ก. $10+j5$ ข. $5+j10$

ค. $10+j0$ ง. $0-j10$

5. ถ้า $\mathbf{Z} = 3-j4$ จงหา $\mathbf{ZZ}^*$

ก. 7 ข. 1

ค. -12 ง. 25

6. ถ้า $\mathbf{Z} = 15\angle 60^\circ$ จงหา $\mathbf{Z}^*$ และ $\mathbf{ZZ}^*$

ก. $15\angle 60^\circ$, 225 ข. $15\angle -60^\circ$, 225

ค. $30\angle -60^\circ$, 225 ง. $30\angle 120^\circ$, 225

7. จงหาผลคูณ $(5+j4)(2+j2)$

ก. $2+j18$ ข. $2-j18$

ค. $-2+j18$ ง. $-2-j18$

8. จงหาผลหาร $\dfrac{(5+j4)}{(2+j2)}$

ก. $-2.25-j0.25$ ข. $2.25-j0.25$

ค. $2.25+j2.25$ ง. $2.25+j0.25$

9. จงหาผลหาร $\dfrac{(60\angle 120^\circ)}{(15\angle 90^\circ)}$

ก. $75\angle 30^\circ$ ข. $75\angle 210^\circ$

ค. $4\angle 210^\circ$ ง. $4\angle 30^\circ$

10. จงหาผลคูณ $(6\angle 30^\circ)(10\angle 90^\circ)$

ก. $4\angle 60^\circ$ ข. $60\angle 60^\circ$

ค. $4\angle 120^\circ$ ง. $60\angle 120^\circ$

หน่วยที่ 8 จำนวนเชิงซ้อน

สาระสำคัญ

จำนวนเชิงซ้อน(Complex Number) เป็นตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย จำนวนจริง กับ จำนวนจินตภาพ การดำเนินการทางคณิตศาสตร์ของจำนวนเชิงซ้อน ก็เหมือนกับการดำเนินการของจำนวนจริงคือ การบวก ลบ คูณ หาร การบวกลบจำนวนเชิงซ้อนนิยมทำในรูปแบบแกนมุมฉาก ส่วนการคูณหารจะทำในรูปแบบเชิงขั้ว

เนื้อหาสาระ

8.1 จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบแกนมุมฉาก(Rectangular form) และ ในรูปเชิงขั้ว(Polar form)

8.2 การ บวก – ลบ จำนวนเชิงซ้อน

8.3 การ คูณ – หาร จำนวนเชิงซ้อน

จุดประสงค์การเรียนรู้

จุดประสงค์ทั่วไป เพื่อให้ผู้เรียนมีความรู้และเข้าใจในเรื่อง :

8.1 จำนวนเชิงซ้อนในรูปแกนมุมฉาก(Rectangular) และรูปเชิงขั้ว(Polar)

8.2 การแปลงจำนวนเชิงซ้อนในรูปแกนมุมฉาก(Rectangular) และรูปเชิงขั้ว(Polar)

8.3 การบวก — ลบ จำนวนเชิงซ้อน

8.4 การคูณ — หาร จำนวนเชิงซ้อน

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม หลังจากเรียนจบบทเรียนนี้แล้ว ผู้เรียนควรมีความสามารถดังนี้

8.1 แปลงจำนวนเชิงซ้อน จากรูปแกนมุมฉาก(Rectangular) เป็นรูปเชิงขั้ว(Polar) ได้

8.2 แปลงจำนวนเชิงซ้อน จากรูปเชิงขั้ว(Polar) เป็นรูปแกนมุมฉาก (Rectangular) ได้

8.3 หาผลลัพธ์จากการ บวก – ลบ จำนวนเชิงซ้อน ได้

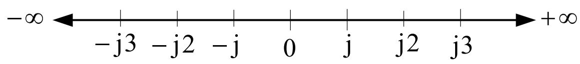
8.4 หาผลลัพธ์จากการ คูณ – หาร จำนวนเชิงซ้อน ได้

หน่วยที่ 8 จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน(Complex Number) เป็นตัวดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย จำนวนจริง และ จำนวนจินตภาพ จำนวนเชิงซ้อน เมื่อนำมาดำเนินการทางคณิตศาสตร์ เช่น บวก ลบ คูณ และหาร การดำเนินการดังกล่าว จะต้องพิจารณาทั้ง ขนาดและมุม เช่น ในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับแบบต่างๆ

เลขจำนวนจริง (Real Number)

เลขจำนวนจริง คือ จำนวนเลขที่เราสามารถทราบค่าได้ว่ามีมากหรือน้อยเพียงใด เลขจำนวนจริงมีทั้งค่าบวก และค่าลบ จากรูปที่ 8.1 แสดงเส้นจำนวนจริง จุดกึ่งกลาง คือ 0 ไปทางขวาเป็นค่า บวก จนถึง $+\infty$ และทางซ้าย เป็นค่าลบ จนถึง $-\infty$

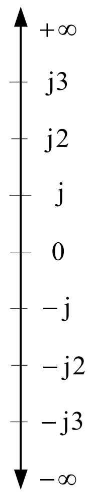


รูปที่ 8.1 แสดงเส้นจำนวนจริง

จำนวนจินตภาพ (Imaginary Number)

จำนวนจินตภาพ หมายถึง จำนวนที่ไม่ทราบค่าแน่นอนได้แก่ ตัวเลขค่าติดลบที่อยู่ในเครื่องหมายรากที่ 2 เช่น $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-4}$ .... ที่ซึ่งไม่อาจหาค่าที่แน่นอนได้ นักคณิตศาสตร์จึงได้จัดระบบตัวเลขดังกล่าวขึ้นมาอีก เรียกว่า จำนวนจินตภาพ โดยกำหนดให้ j เป็นหน่วยจินตภาพ มีค่าเป็นดังนี้ $j = \sqrt{-1}$ ดังนั้น $j^2 = \sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = -1$ และ $j^3 = j^2\times j = -j$

$$j^4 = j^2\times j^2 = (-1)(-1) = 1$$

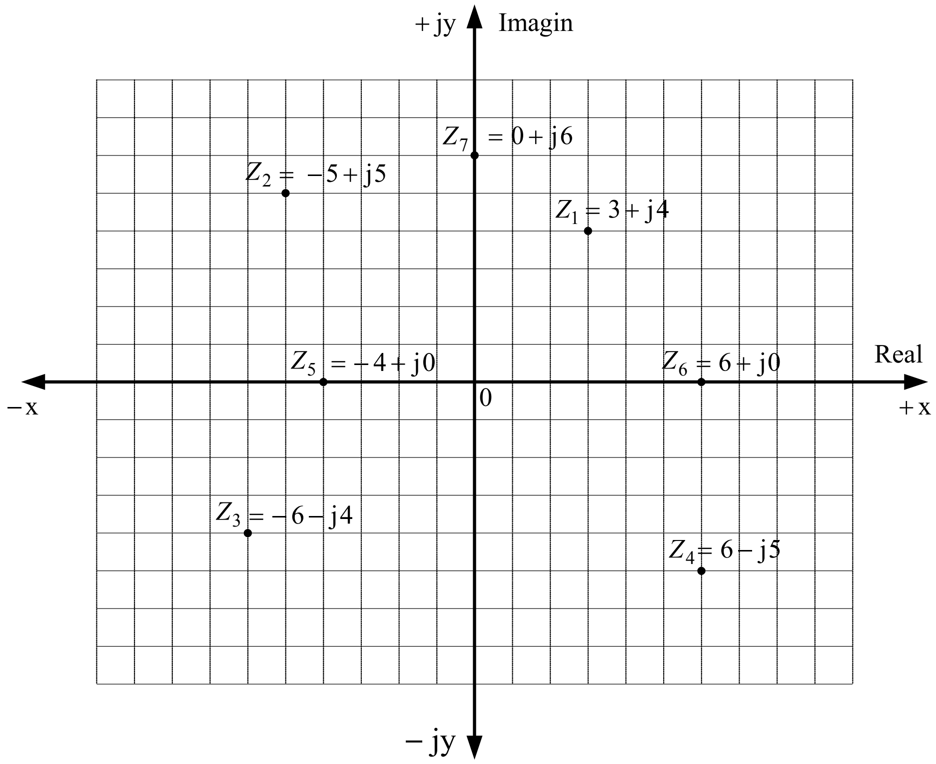


รูปที่ 8.2 แสดงเส้นจำนวนจินตภาพ

ระนาบเชิงซ้อน(Complex Plane)

เมื่อนำเอาเส้นระบบจำนวนจริง และเส้นระบบจำนวนจินตภาพ มาประกอบกัน ก็จะได้ระนาบเชิงซ้อน ที่สามารถ ระบุจุดใดๆ ที่สามารถแทนค่าจำนวนเชิงซ้อน ดังกล่าวได้ ดังนั้นระนาบเชิงซ้อนประกอบด้วย เส้นจำนวนจริงอยู่ในแนวนอน(แกน x) และเส้นระบบจำนวนจินตภาพ ให้อยู่ในแนวตั้ง (แกน y)

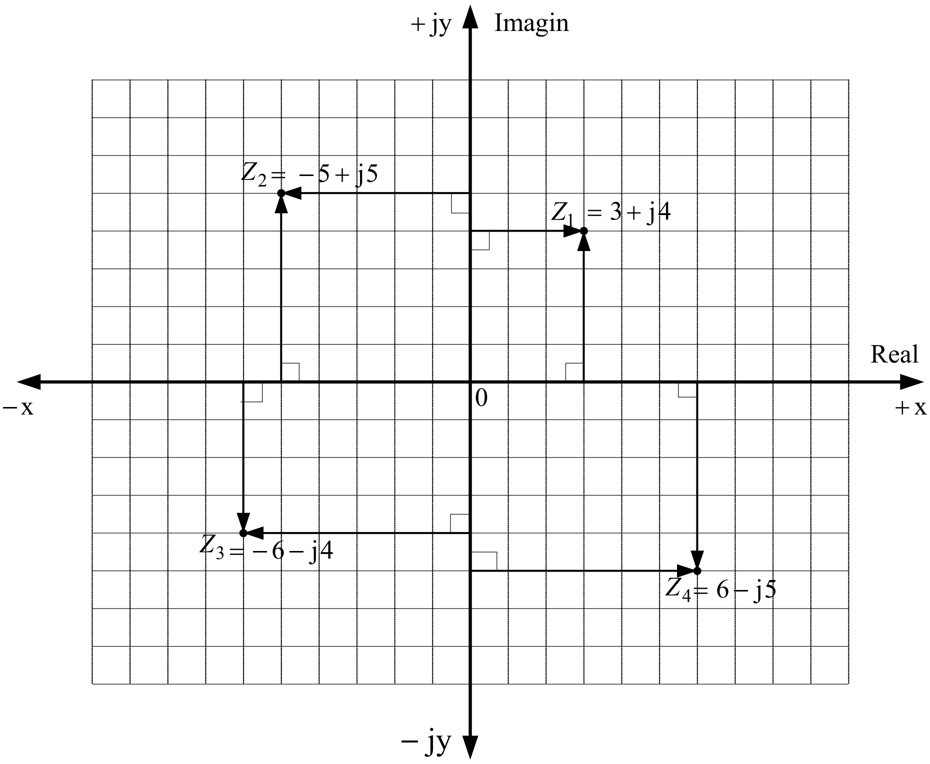
เลขของจำนวนเชิงซ้อน ที่เขียนอยู่ในรูปของ $x + jy$ เมื่อ x และ y เป็นเลขจำนวนจริงใด ๆ โดยเรียกส่วนของ x ว่าส่วนจริง(Real : Re) และ y ว่าส่วนจินตภาพ(Imaginary : Im) เลขจำนวนดังกล่าวนี้เรียกว่าจำนวนเชิงซ้อน ดังแสดงในรูปที่ 8.3



รูปที่ 8.3 แสดงค่าจำนวนเชิงซ้อนที่กำหนดลงใน Complex Plane ในรูปแบบของแกนมุมฉาก

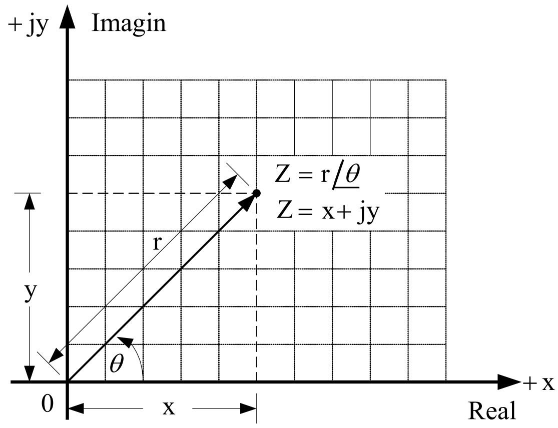
8.1 จำนวนเชิงซ้อน ในรูปแบบแกนมุมฉาก(Regtangular Form) และ ในรูปแบบเชิงขั้ว(Polar Form)

จำนวนเชิงซ้อน ในรูปแบบแกนมุมฉาก คือรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนในรูปของ $\mathbf{Z} = x + jy$ เมื่อนำไปเขียนลงใน ระนาบเชิงซ้อน ตำแหน่งของจำนวนจริงจะบอกขนาดของ x และจำนวนจินตภาพจะบอกขนาดของ y เมื่อขีดเส้นตรงจากจุดของจำนวนเชิงซ้อน ไปยังแกน x และ y รูปร่างและขนาด จะมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า หรือ จัตุรัส ถ้าขนาดของจำนวนจริง เท่ากันกับจำนวนจินตภาพ ดังแสดงในรูปที่ 8.4



รูปที่ 8.4 แสดงรูปร่างของจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบแกนมุมฉาก

จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว เขียนได้ในรูปของ $\mathbf{Z} = r\angle\theta$ โดยค่าของ r เรียกว่าค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value) ของ จำนวนเชิงซ้อน โดย r เริ่มจากจุด origin ลากไปหาจุด **Z** และ θ คือมุมของ จำนวนเชิงซ้อน วัดจากแกน x ขึ้นไปหาเส้นตรง r ดังรูปที่ 8.5



รูปที่ 8.5 แสดงจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้วเทียบกับรูปแบบแกนมุมฉาก

พิจารณารูปที่ 8.5 ใช้ทฤษฎี พิธากอรัส และพื้นฐานตรีโกณมิติ จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้วเทียบกับรูปแบบแกนมุมฉาก ดังนี้

จาก $\mathbf{Z} = r\angle\theta$

แปลงจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว จาก รูปแบบแกนมุมฉาก ดังนี้

$$r^2 = x^2 + y^2$$

หรือ $$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{................(8.1)}$$

และ $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{................(8.2)}$$

แปลงจำนวนเชิงซ้อน รูปแบบแกนมุมฉาก จากรูปแบบเชิงขั้ว ดังนี้

$$x = r\cos\theta \qquad \text{................(8.3)}$$

$$y = r\sin\theta \qquad \text{................(8.4)}$$

หรือ $$jy = jr\sin\theta$$

ดังนั้น $$\mathbf{Z} = r(\cos\theta + j\sin\theta) \qquad \text{................(8.5)}$$

ตัวอย่างที่ 8.1 จงแปลงจำนวนเชิงซ้อนแกนมุมฉาก $\mathbf{Z} = 30 + j40$ ให้เป็นรูป เชิงขั้ว

วิธีทำ จาก $\mathbf{Z} = 30 + j40$ ดังนั้น $x = 30$, $y = 40$

จากสมการ(8.1) $$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$r = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = \sqrt{900 + 1600}$$

$$r = \sqrt{2500} = 50$$

และจากสมการ(8.2) $$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{40}{30}\right) = \tan^{-1}(1.33)$$

$$\theta = 53.13°$$

เพราะฉะนั้น $\mathbf{Z} = 30 + j40 = 50\angle 53.13°$ ....**ตอบ**

ตัวอย่างที่ 8.2 จงแปลงจำนวนเชิงซ้อนเชิงขั้ว $\mathbf{Z} = 100\angle 36.87°$ ให้เป็นรูป แกนมุมฉาก

วิธีทำ จาก $\mathbf{Z} = r\angle\theta$ ดังนั้น $r = 50$, $\theta = 36.87°$

จากสมการ(8.3 , 8.4) $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

จะได้ $$x = 100\cos(36.87°)$$

$$= 100\,(0.8) = 80$$

และ $$y = 100\sin(36.87°)$$

$$= 100\,(0.6) = 60$$

เพราะฉะนั้น $\mathbf{Z} = 100\angle 36.87° = 80 + j60$ ....**ตอบ**

ตัวอย่างที่ 8.3 จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว $\mathbf{Z} = 50\underline{/-70^\circ}$ จงแปลงเป็นรูปแกนมุมฉาก

วิธีทำ จาก

$$\mathbf{Z} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

$$\mathbf{Z} = 50\big(\cos(-70^\circ) + j\sin(-70^\circ)\big)$$

$$= 50\big((0.342) + j(-0.9397)\big)$$

$$\mathbf{Z} = 17 - j47$$

………..…….. ……..**ตอบ**

8.2 การบวกและลบจำนวนเชิงซ้อน

การบวกและลบจำนวนเชิงซ้อน ต้องทำให้อยู่ในรูปแกนมุมฉาก $(\mathbf{Z} = x + jy)$ ทำได้โดยการบวกหรือลบส่วนจริงกับส่วนจริงและส่วนจินตภาพกับส่วนจินตภาพ

กำหนดให้ $\mathbf{Z_1} = a + jb$ และ $\mathbf{Z_2} = c + jd$

จะได้ $$\mathbf{Z_1} + \mathbf{Z_2} = (a+c) + j(b+d)$$

และ $$\mathbf{Z_1} - \mathbf{Z_2} = (a-c) + j(b-d)$$

ตัวอย่างที่ 8.4 จงทำให้เป็นผลสำเร็จ 1) $(1-j3)+(2+j4)$ และ 2) $(1-j5)-(-2-j7)$

วิธีทำ 1) $$(1-j3)+(2+j4) = (1+2)+j(-3+4)$$

$$= 3 + j$$

…………..……..…..**ตอบ**

2) $$(1-j5)-(-2-j7) = (1+2)+j(-5+7)$$

$$= 3 + j2$$

……………...…….**ตอบ**

ตัวอย่างที่ 8.5 จงหาผลลบจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ $5\underline{/30^\circ} - 4\underline{/60^\circ}$

วิธีทำ แปลงให้อยู่ในรูปแกนมุมฉาก

$$5\underline{/30^\circ} = 5\big(\cos 30^\circ + j\sin 30^\circ\big)$$

$$= 5\big(0.866 + j0.5\big)$$

$$= 4.33 + j2.5$$

และ $$4\underline{/60^\circ} = 4\big(\cos 60^\circ + j\sin 60^\circ\big)$$

$$= 4\big(0.5 + j0.866\big)$$

$$= 2 + j3.464$$

ดังนั้น $$5\underline{/30^\circ} + 4\underline{/60^\circ} = \big(4.33 + j2.5\big) - \big(2 + j3.464\big)$$

$$= 2.33 - j0.964$$

……..………..…….**ตอบ**

8.3 การคูณและหารจำนวนเชิงซ้อน

8.3.1 การคูณจำนวนเชิงซ้อน

ถ้าจำนวนเชิงซ้อน $\mathbf{Z_1}$ และ $\mathbf{Z_2}$ อยู่ในรูปเชิงขั้ว คูณกันได้โดยการนำค่า r มาคูณกันและนำค่ามุม θ มาบวกกัน ดังนี้

ถ้า $$\mathbf{Z_1} = r_1\angle\theta_1 \; ; \quad \mathbf{Z_2} = r_2\angle\theta_2$$

$$\mathbf{Z_1}\times\mathbf{Z_2} = r_1\angle\theta_1 \times r_2\angle\theta_2$$

$$= r_1\times r_2\,(\angle\theta_1+\theta_2)$$ หน่วยของ θ เป็นองศา

ถ้าจำนวนเชิงซ้อนอยู่ในรูปแกนมุมฉาก การคูณทำได้โดยใช้วิธีการคูณแบบพีชคณิต

กำหนดให้ $\mathbf{Z_1} = a + jb$ และ $\mathbf{Z_2} = c + jd$

$$\mathbf{Z_1}\times\mathbf{Z_2} = (a+jb)(c+jd)$$

$$= ac + jbc + jad + j^2bd$$

ตัวอย่างที่ 8.6 กำหนดให้ $\mathbf{Z_1} = 3+j2$, $\mathbf{Z_2} = 4+j3$ จงหาค่า $\mathbf{Z_1Z_2}$

วิธีทำ

$$\mathbf{Z_1Z_2} = (3+j2)(4+j3)$$

$$= 12+j9+j8+j^2\,6$$

$$= 12+j17+(-1)6$$

$$= 12-6+j17$$

$$= 6+j17$$ ……………...………..**ตอบ**

ตัวอย่างที่ 8.7 กำหนดให้ $\mathbf{Z_1} = 6\angle 60^\circ$, $\mathbf{Z_2} = 5\angle 45^\circ$ จงหาค่า $\mathbf{Z_1Z_2}$

วิธีทำ

$$\mathbf{Z_1Z_2} = (6\times 5)(\angle 60^\circ + \angle 45^\circ)$$

$$= 30\angle 105^\circ$$ …………….…..……..**ตอบ**

ตัวอย่างที่ 8.8 ถ้า $\mathbf{Z_1} = 1+j3$, $\mathbf{Z_2} = -2-j2$ จงหาค่า $\mathbf{Z_1Z_2}$

วิธีทำ

$$\mathbf{Z_1Z_2} = (1+j3)(-2-j2)$$

$$= (1\times(-2)) + (1\times(-j2)) + (j3\times(-2)) + (j3\times(-j2))$$

$$= -2-j2-j6-j^2\,6$$

$$= -2-j8-(-1)6$$

$$= -2-j8+6$$

$$= 4-j8$$ ……………………..……**ตอบ**

8.3.2 การ Conjugate จำนวนเชิงซ้อน

Conjugate ของจำนวนเชิงซ้อน คือ การเปลี่ยนเครื่องหมายของส่วนจินตภาพ ส่วนเครื่องหมายของส่วนจริงยังคงเดิม เช่น จำนวนเชิงซ้อน $2+j4$ Conjugate ของจำนวนเชิงซ้อน ก็คือ $2-j4$ หรือ Conjugate ของ $-3-j6$ คือ $-3+j6$ เป็นต้น ถ้า $\mathbf{Z}=x+jy$ Conjugate ของ $\mathbf{Z}$ เขียนแทนด้วย $\mathbf{Z}^*$ (แซดสตาร์) คือ $\mathbf{Z}^*=x-jy$

ตัวอย่างที่ 8.9 ถ้า $\mathbf{Z}=2-j5$ จงหาค่าของ $\mathbf{Z}^*$ และ $\mathbf{ZZ}^*$

วิธีทำ

$$\mathbf{Z}^* = 2+j5$$

$$\begin{aligned}\mathbf{ZZ}^* &= (2-j5)(2+j5)\\ &= 4+j10-j10-j^2 25\\ &= 4+25 = 29\end{aligned}$$

……………………………**ตอบ**

จะเห็นว่าเมื่อนำจำนวนเชิงซ้อน และ Conjugate ของมันคูณกันแล้วผลที่ได้รับจะเหลือค่าจริงเพียงค่าเดียวสำหรับจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว เขียนได้ดังนี้

ในรูปเชิงขั้ว $\mathbf{Z}=r\,\underline{/\theta}$; $\mathbf{Z}^*=r\,\underline{/-\theta}$

8.3.3 การหารจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว 2 จำนวนทำการหารกันทำได้โดย การนำค่า r มาหารกัน และนำมุม θ ของตัวตั้งลบกับมุม θ ของตัวหาร

ในกรณีจำนวนเชิงซ้อนในรูปแกนมุมฉาก ถ้าจะทำการหารกันทำได้โดยให้นำเอา Conjugate ของตัวส่วนคูณทั้งเศษและส่วน

ตัวอย่างที่ 8.10 จงหาผลหารของ $\dfrac{15\underline{/30^\circ}}{5\underline{/-60^\circ}}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{15\underline{/30^\circ}}{5\underline{/-60^\circ}} &= \frac{15}{5}\,\underline{/(30^\circ-(-60^\circ))}\\ &= 3\,\underline{/90^\circ}\end{aligned}$$

……………………………**ตอบ**

ตัวอย่างที่ 8.11 ถ้า $\mathbf{Z_1}=5-j4$ และ $\mathbf{Z_2}=3+j2$ จงหาค่า $\dfrac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}}$

วิธีทำ

$$\frac{\mathbf{Z_1}}{\mathbf{Z_2}} = \frac{(5-j4)}{(3+j2)} = \frac{(5-j4)}{(3+j2)}\times\frac{(3-j2)}{(3-j2)}$$

$$= \frac{15 - j10 - j12 + j^2 8}{9 - j6 + j6 - j^2 4}$$

$$= \frac{15 - j22 + (-1)8}{9 - j^2 4}$$

$$= \frac{15 - j22 - 8}{9 + 4}$$

$$= \frac{7 - j22}{13}$$

$$= -0.54 - j1.69$$ ……………........………**ตอบ**

สรุปสาระสำคัญ

จำนวนเชิงซ้อนรูป แกนมุมฉาก เขียนได้ดังนี้ $\mathbf{Z} = x + jy$

จำนวนเชิงซ้อน รูปเชิงขั้ว เขียนได้ดังนี้ $\mathbf{Z} = r\,\underline{/\theta}$

สรุปการแปลงจำนวนเชิงซ้อน รูปแกนมุมฉาก จากรูปเชิงขั้ว ดังนี้

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

และแปลงจำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้วจากรูปแกนมุมฉากจาก ดังนี้

$$r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

การบวก – ลบ เลขเชิงซ้อนทำได้โดย นำค่าจำนวนจริงบวก – ลบ กัน และค่าจำนวนจินตภาพ บวก – ลบกัน โดยการบวก – ลบ เลขเชิงซ้อนต้องอยู่ในรูปแกนมุมฉาก เท่านั้น ส่วนการคูณหารถ้า แปลงให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว จะทำได้ง่ายโดยนำค่าจำนวนจริงมาคูณ – หาร แล้วนำค่ามุมมาบวก – ลบกัน

แบบฝึกหัด

หน่วยที่ 8 จำนวนเชิงซ้อน

1. จงแสดงวิธีแปลงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

1.1) $3+j4$ 1.2) $-2+j3$ 1.3) $0.4-j0.3$ 1.4) $60-j100$

2. จงแสดงวิธีแปลงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแกนมุมฉาก

2.1) $30\underline{/150^\circ}$ 2.2) $50\underline{/-120^\circ}$ 2.3) $20\underline{/-45^\circ}$ 2.4) $5\underline{/53.13^\circ}$

3. จงหาผลบวกและผลลบเลขจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

3.1) $(5-j3)-(3-j10)$ 3.2) $(5-j5)-(7.07\underline{/135^\circ})$ 3.3) $(4-j6)+(2+j4)$

3.4) $(25\underline{/45^\circ})-(5-j8)$

4. จงหาค่า $\mathbf{Z}^*$ และ $\mathbf{ZZ}^*$

4.1) $\mathbf{Z} = 3-j5$ 4.2) $\mathbf{Z} = 10\underline{/60^\circ}$ 4.3) $\mathbf{Z} = 6+j8$ 4.4) $\mathbf{Z} = 30\underline{/-50^\circ}$

5. จงแสดงวิธีการคูณและหารจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

5.1) $(70\underline{/-135^\circ})$, $(35\underline{/90^\circ})$ 5.2) $(5+j10)$, $(3-j4)$ 5.3) $j10$, $(6+j8)$

5.4) $(12\underline{/50^\circ})$, $(6\underline{/120^\circ})$

คำตอบ

1.1) $5\underline{/53.13^\circ}$ 1.2) $3.6\underline{/-56.31^\circ}$ 1.3) $0.5\underline{/-36.86^\circ}$ 1.4) $116.62\underline{/-59.04^\circ}$

2.1) $-26+j15$ 2.2) $-25-j43.30$ 2.3) $14.14-j14.14$ 2.4) $3+j4$

3.1) $2+j7$ 3.2) $10-j10$ 3.3) $6-j2$ 3.4) $12.67+j25.67$

4.1) $3-j5$, 34 4.2) $10\underline{/-60^\circ}$, 100 4.3) $6-j8$, 100 4.4) $30\underline{/50^\circ}$, 900

5.1) $2{,}450\underline{/-45^\circ}$, $2\underline{/-225^\circ}$ 5.2) $(55+j10)$, $(-1+j2)$

5.3) $(-80+j60)$, $(0.8-j0.6)$ 5.4) $72\underline{/170^\circ}$, $2\underline{/-70^\circ}$

แบบทดสอบหลังเรียน

หน่วยที่ 8 จำนวนเชิงซ้อน

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียว

1. จงแปลงจำนวนเชิงซ้อนรูป แกนมุมฉาก $3+j4$ ให้อยู่ในรูป เชิงขั้ว

   ก. $5\angle 53.13^\circ$ ข. $-5\angle -53.13^\circ$

   ค. $5\angle -53.13^\circ$ ง. $5\angle 36.86^\circ$

2. จงแปลงจำนวนเชิงซ้อนรูป เชิงขั้ว $7.2\angle 56.3^\circ$ ให้อยู่ในรูป แกนมุมฉาก

   ก. $-4-j6$ ข. $4+j6$

   ค. $4-j6$ ง. $-4+j6$

3. จงหาผลบวกของ $(3-j4)+(-5+j6)$

   ก. $2+j2$ ข. $-2+j2$

   ค. $-1-j2$ ง. $2-j1$

4. จงหาผลลบของ $(5+j5)+(7.07\angle -45^\circ)$

   ก. $10+j5$ ข. $5+j10$

   ค. $0+j10$ ง. $10-j0$

5. ถ้า $\mathbf{Z} = 3-j4$ จงหา $\mathbf{ZZ}^*$

   ก. 7 ข. 25

   ค. –12 ง. 1

6. ถ้า $\mathbf{Z} = 15\angle 60^\circ$ จงหา $\mathbf{Z}^*$ และ $\mathbf{ZZ}^*$

   ก. $15\angle -60^\circ$, 225 ข. $15\angle 60^\circ$, 225

   ค. $30\angle -60^\circ$, 225 ง. $30\angle 120^\circ$, 225

7. จงหาผลคูณ $(5+j4)(2+j2)$

   ก. $2-j18$ ข. $2+j18$

   ค. $-2+j18$ ง. $-2-j18$

8. จงหาผลหาร $\dfrac{(5+j4)}{(2+j2)}$

   ก. $2.25-j0.25$ ข. $-2.25-j0.25$

   ค. $2.25+j2.25$ ง. $2.25+j0.25$

9. จงหาผลหาร $\dfrac{(60\angle 120^\circ)}{(15\angle 90^\circ)}$

   ก. $75\angle 30^\circ$ ข. $75\angle 210^\circ$

   ค. $4\angle 30^\circ$ ง. $4\angle 210^\circ$

10. จงหาผลคูณ $(6\underline{/30^\circ})(10\underline{/90^\circ})$

ก. $4\underline{/60}^\circ$ ข. $60\underline{/120}^\circ$

ค. $4\underline{/120}^\circ$ ง. $60\underline{/60}^\circ$

เอกสารอ้างอิง

นภัทร วัจนเทพินทร์. วิจิตร ศิลคุณ. ประเสริฐ ปิ่นปฐมรัฐ. วงจรไฟฟ้ากระแสสลับ. กรุงเทพฯ : ศูนย์ส่งเสริมอาชีวะ , 2543

มงคล ทองสงคราม . ทฤษฎีวงจรไฟฟ้า2. กรุงเทพฯ : หจก. วี.เจ.พริ้นติ้ง , 2540

ไมตรี วรวุฒิจรรยากุล. ทฤษฎีวงจรไฟฟ้า เล่ม 4 . กรุงเทพฯ : ศูนย์การพิมพ์พลชัย , 2540

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม. ชั้นมัธยมศึกษาปีที่5. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภา ลาดพร้าว , 2552

สุภาภรณ์ แก้วศักดา. อิเล็กทรอนิกส์ 1. พิมพ์ครั้งที่ 9 . กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง , 2548

Alan Jeffrey . **ESSENTIALS OF ENGIEERING MATHEMATICS**. Singapore. Chapman & Hall. 1992

Charles K. Alexander Matthew N.O. Sadiku. **Fundamentals of Electric Circuits**. Second Edition Singapore. McGraw-Hill. 2004

ภาคผนวก

- เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน
- เฉลยแบบฝึกหัดท้ายหน่วย

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

เฉลยแบบทดสอบก่อนเรียนหน่วยที่ 8

1. ค.	2. ง.	3. ก.	4. ค.	5. ง.	6. ข.	7 ก.	8. ข.	9. ง.	10. ง.

เฉลยแบบทดสอบหลังเรียนหน่วยที่ 8

1. ก.	2. ข.	3. ข.	4. ง.	5. ข.	6. ก.	7 ข.	8. ก.	9. ค.	10. ข.

เฉลยแบบฝึกหัด

หน่วยที่ 8 จำนวนเชิงซ้อน

1. จงแสดงวิธีแปลงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

1.1) $3+j4$ 1.2) $-2+j3$ 1.3) $0.4-j0.3$ 1.4) $60-j100$

1.1) $3+j4$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53.13°$$

ดังนั้นจะได้ $3+j4 = 5\,\underline{/53.13°}$ ……………..……….... **ตอบ.**

1.2) $-2+j3$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+3^2} = \sqrt{13} = 3.6$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{-2}\right) = -56.31°$$

ดังนั้นจะได้ $-2+j3 = 3.6\,\underline{/-56.31}°$ ……...............…… **ตอบ**.

1.3) $0.4-j0.3$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(0.4)^2+(-0.3)^2} = \sqrt{0.25} = 0.5$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-0.3}{0.4}\right) = -36.86°$$

ดังนั้นจะได้ $0.4-j0.3 = 0.5\,\underline{/-36.86°}$ ……….………........ **ตอบ**.

1.4) $60-j100$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(60)^2+(100)^2} = \sqrt{13{,}600} = 116.62$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-100}{60}\right) = -59.04°$$

ดังนั้นจะได้ $60-j100 = 116.62\underline{/-59.04}°$ …………..………… **ตอบ**.

2. จงแสดงวิธีแปลงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปแกนมุมฉาก

2.1) $30\angle 150^\circ$ 2.2) $50\angle -120^\circ$ 2.3) $20\angle -45^\circ$ 2.4) $5\angle 53.13^\circ$

2.1) $30\angle 150^\circ$

$$x = r\cos\theta = 30\cos(150^\circ) = 30(-0.866) = -25.98$$

$$y = r\sin\theta = 30\sin(150^\circ) = 30(0.5) = 15$$

ดังนั้น $30\angle 150^\circ = -26 + j15$ …………………… **ตอบ**

2.2) $50\angle -120^\circ$

$$x = r\cos\theta = 50\cos(-120^\circ) = 50(-0.5) = -25$$

$$y = r\sin\theta = 50\sin(-120^\circ) = 50(-0.866) = -43.30$$

ดังนั้น $50\angle -120^\circ = -25 - j43.3$ …..……………… **ตอบ**

2.3) $20\angle -45^\circ$

$$x = r\cos\theta = 20\cos(-45^\circ) = 20(0.707) = 14.14$$

$$y = r\sin\theta = 20\sin(-45^\circ) = 20(-7.07) = -14.14$$

ดังนั้น $20\angle -45^\circ = 14.14 - j14.14$ …………………... **ตอบ**

2.4) $5\angle 53.13^\circ$

$$x = r\cos\theta = 5\cos(53.13^\circ) = 5(0.6) = 3$$

$$y = r\sin\theta = 5\sin(53.13^\circ) = 5(0.8) = 4$$

ดังนั้น $5\angle 53.13^\circ = 3 + j4$ …………………… **ตอบ**

3. จงหาผลบวกและผลลบเลขจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

3.1) $(5 - j3) - (3 - j10)$ 3.2) $(5 - j5) - (7.07\angle 135^\circ)$ 3.3) $(4 - j6) + (2 + j4)$

3.4) $(25\angle 45^\circ) - (5 - j8)$

3.1) $(5 - j3) - (3 - j10) = 5 - 3 - j3 + j10$

จะได้ $(5 - j3) - (3 - j10) = 2 + j7$ ………….……... **ตอบ**

3.2) $(5-j5)-(7.07\underline{/135°})$

แปลง $7.07\underline{/135°}$ ให้เป็นรูปแกนมุมฉาก

$$x = r\cos\theta = 7.07\cos(135°) = 7.07(-0.707) = -5$$

$$y = r\sin\theta = 7.07\sin(135°) = 7.07(0.707) = 5$$

จะได้ $7.07\underline{/135°} = -5 + j5$

ดังนั้น $(5-j5)-(-5+j5) = 10-j10$ …..……………... **ตอบ**

3.3) $(4-j6)+(2+j4)$

$$(4-j6)+(2+j4) = 4+2-j6+j4$$

$$= 6-j2$$ …..……………... **ตอบ**

3.4) $(25\underline{/45°})-(5-j8)$

แปลง $(25\underline{/45°})$ ให้เป็นรูปแกนมุมฉาก

$$x = r\cos\theta = 25\cos(45°) = 25(0.707) = 17.67$$

$$y = r\sin\theta = 25\sin(45°) = 25(0.707) = 17.67$$

จะได้ $25\underline{/45°} = 17.67 + j17.67$

ดังนั้น $(17.67+j17.67)-(5-j8) = 12.67+j25.67$ …………..……….. **ตอบ**

4. จงหาค่า $\mathbf{Z}^*$ และ $\mathbf{ZZ}^*$

4.1) $\mathbf{Z} = 3-j5$ 4.2) $\mathbf{Z} = 10\underline{/60°}$ 4.3) $\mathbf{Z} = 6+j8$ 4.4) $\mathbf{Z} = 30\underline{/-50°}$

4.1) $\mathbf{Z} = 3-j5 \quad \therefore \quad \mathbf{Z}^* = (3+j5)$

$$\mathbf{ZZ}^* = (3-j5)(3+j5) = 9+j15-j15-j^2 25$$

$$= 9-(-1)(25)$$

$$= 9+25 = 34$$ ……………………… **ตอบ**

4.2) $\mathbf{Z} = 10\underline{/60°} \quad \therefore \quad \mathbf{Z}^* = 10\underline{/-60°}$

$\mathbf{ZZ}^* = (10\underline{/60°})(10\underline{/-60°}) = 100\,\underline{/60°-60°} = 100\underline{/0°} = 100$ ……………... **ตอบ**

4.3) $\mathbf{Z} = 6+j8 \quad \therefore \quad \mathbf{Z}^* = 6-j8$

$$\mathbf{ZZ}^* = (6+j8)(6-j8) = 36-j48+j48-j^2 64$$

ดังนั้น $\mathbf{ZZ}^* = 36-(-1)64 = 36+64 = 100$ …………….……… **ตอบ**

4.4) $\mathbf{Z} = 30\underline{/-50°} \quad \therefore \quad \mathbf{Z}^* = 30\underline{/50°}$

$\mathbf{ZZ}^* = (30\underline{/50°})(30\underline{/-50°}) = 900\underline{/50°-50°} = 900\underline{/0°} = 900$ ……………..… **ตอบ**

5. จงแสดงวิธีการคูณและหารจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

5.1) $(70\underline{/-135^\circ})\ ,\ (35\underline{/90^\circ})$ 5.2) $(5+j10)\ ,\ (3-j4)$ 5.3) $j10\ ,\ (6+j8)$

5.4) $(12\underline{/50^\circ})\ ,\ (6\underline{/120^\circ})$

5.1) $(70\underline{/-135^\circ})\ ,\ (35\underline{/90^\circ})$

$(70\underline{/-135^\circ})(35\underline{/90^\circ}) = (70\times 35)(\underline{/-135^\circ+90^\circ}) = 2{,}450\underline{/-45^\circ}$ ……………….. **ตอบ**

$\dfrac{(70\underline{/-135^\circ})}{(35\underline{/90^\circ})} = \left(\dfrac{70}{35}\right)\left(\underline{/-135^\circ-90^\circ}\right) = 2\underline{/-225^\circ}$ ………..………. **ตอบ**

5.2) $(5+j10)\ ,\ (3-j4)$

$$(5+j10)(3-j4) = 15+j30-j20-j^2 40$$
$$= 15+j10-(-1)(40)$$
$$= 55+j10$$

………………… **ตอบ**

$$\frac{(5+j10)}{(3-j4)} = \frac{(5+j10)}{(3-j4)}\times\frac{(3+j4)}{(3+j4)} = \frac{15+j30+j20+j^2 40}{3^2+4^2}$$
$$= \frac{15+j50+(-1)(40)}{25} = \frac{-25+j50}{25}$$
$$= -1+j2$$

………………… **ตอบ**

5.3) $j10\ ,\ (6+j8)$

$$(0+j10)(6+j8) = j60+j^2 80$$
$$= j60+(-1)80$$
$$(0+j10)(6+j8) = -80+j60$$

……..………... **ตอบ**

$$\frac{(0+j10)}{(6+j8)} = \frac{(0+j10)}{(6+j8)}\times\frac{(6-j8)}{(6-j8)} = \frac{j60-j^2 80}{6^2+8^2}$$
$$\frac{(0+j10)}{(6+j8)} = \frac{j60-j^2 80}{36+64}$$
$$= \frac{80+j60}{100} = 0.8-j0.6$$

…………..……… **ตอบ**

5.4) $(12\underline{/50^\circ})\ ,\ (6\underline{/120^\circ})$

$(12\underline{/50^\circ})(6\underline{/120^\circ}) = (12\times 6)(\underline{/50^\circ+120^\circ}) = 72\underline{/170^\circ}$ ………………… **ตอบ**

$\dfrac{(12\underline{/50^\circ})}{(6\underline{/120^\circ})} = \left(\dfrac{12}{6}\right)\left(\underline{/50^\circ-120^\circ}\right) = 2\underline{/-70^\circ}$ ………………… **ตอบ**